

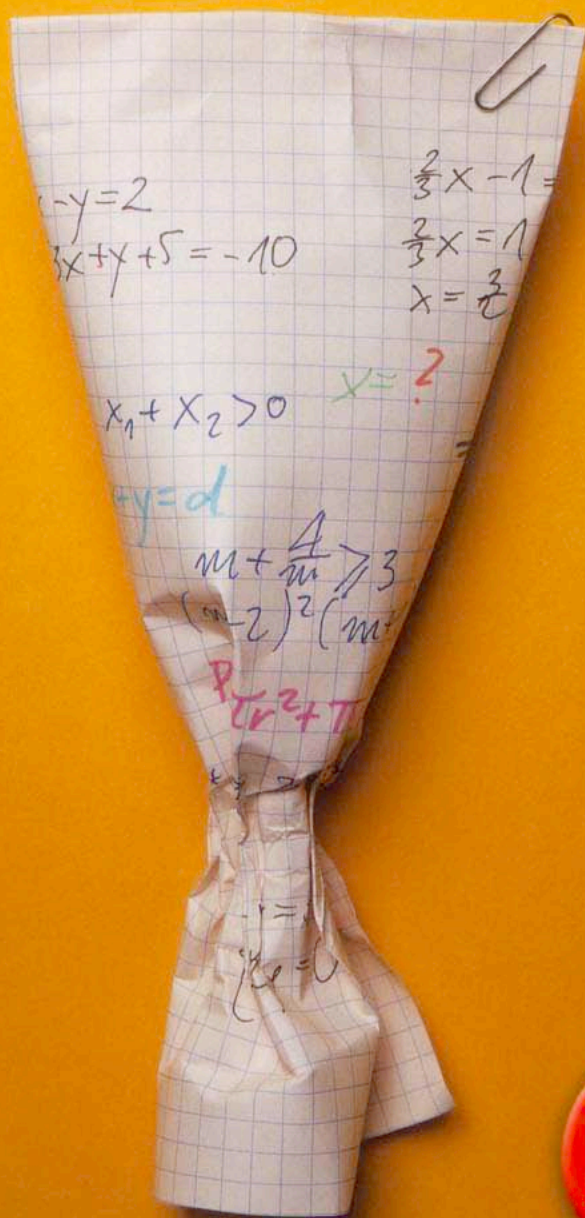
Piotr
Jędrzejewicz

ZADANIA
PRZYGOTOWUJĄCE
DO KONKURSÓW

bukieTy

matematyczne

DLA GIMNAZJUM



ALGEBRA

Liczby wymierne

Bukiet 1

1. Oblicz wartość wyrażenia

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}$$

2. Znajdź liczby naturalne a, b, c i d , dla których

$$\frac{151}{115} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d}}}$$

3. W podobny sposób spróbuj przekształcić ułamek $\frac{225}{157}$.

Bukiet 2

- Uzasadnij, że jeśli $x, y, z \geq 1$, to $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq 3$.
- Pokaż, że jeśli $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$ dla naturalnych $x, y, z \geq 1$, to jedna z liczb x, y, z jest równa 1.
- Znajdź wszystkie trójki liczb naturalnych x, y, z , dla których $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ jest liczbą naturalną.

Bukiet 3

- Jaki może być mianownik ułamka nieskracalnego $\frac{a}{b}$, gdzie a jest liczbą całkowitą, a b liczbą naturalną, jeśli iloraz $\frac{6 \cdot a}{b}$ jest liczbą całkowitą?
- O pewnej liczbie wymiernej w wiadomo, że $4w$ i $10w$ są liczbami całkowitymi. Co możesz powiedzieć o mianowniku ułamka nieskracalnego wyrażającego liczbę w ?

3. Dana jest liczba wymierna x oraz liczby naturalne m i n spełniające warunek $\text{NWD}(m, n) = 1$. Wykaż, że jeżeli liczby mx i nx są całkowite, to liczba x też jest całkowita.

Wyrażenia algebraiczne

Bukiet 4

1. Czy prawdą jest, że jeśli $ad = bc$ i $cf = de$, to $af = be$?
2. Wykaż, że jeżeli $ab' = a'b$ i $cd' = c'd$, to

$$(ad + bc)b'd' = (a'd' + b'c')bd.$$
3. Wiadomo, że $a + b' = a' + b$ i $c + d' = c' + d$. Uzasadnij równość

$$ac + bd + a'd' + b'c' = a'c' + b'd' + ad + bc.$$

Bukiet 5

1. Sprawdź równość

$$(ac + bd)(ad + bc) = ab(c^2 + d^2) + cd(a^2 + b^2).$$
2. Wykaż, że jeśli $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$ i $ac + bd = 0$, to $ab + cd = 0$.
3. Czy zachodzą jakieś prostsze zależności między liczbami a, b, c, d , spełniającymi warunki zadania 2?

Bukiet 6

1. Dodaj ułamki:

$$\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c}.$$

2. Udowodnij, że jeżeli liczby a, b, c są różne, to

$$\frac{a-c}{(a-b)(b-c)} + \frac{b-a}{(b-c)(c-a)} + \frac{c-b}{(c-a)(a-b)} = \frac{2}{a-b} + \frac{2}{b-c} + \frac{2}{c-a}.$$

3. Spróbuj otrzymać podobną równość dla czterech różnych liczb a, b, c, d .

Bukiet 7

Znajdź wszystkie pary liczb całkowitych (x, y) spełniające równanie:

1. $(x-1)y = 10$; 2. $xy + x = -7$; 3. $xy^2 - y^3 = 12$.

Bukiet 8

Liczy x i y spełniają warunki $2x - y = 10$ i $x + y < 20$.

- Wykaż, że $x, y < 10$.
- Uzasadnij nierówność $x < 2x - y$.
- Która liczba jest większa: x czy y ?

Bukiet 9

- Powiedz, dlaczego jeśli $a > 0$ i $b > -1$, to $a(b+1) > 0$.
- W podobny sposób wykaż, że gdy $a < 0$ i $b > 1$, to $ab < a$.
- Udowodnij, że dla $a > 1$ i $b < 1$ zachodzi nierówność

$$ab + 1 < a + b.$$

Potęgi, pierwiastki, silnia

Bukiet 10

- Dla jakiego n zachodzi równość $256^{12} = 2^n$?
- Wykaż, że $16^{14} = 128^8$.
- Co jest większe: 33^{60} czy 63^{50} ?

Okręgi i wielokąty

Bukiet 42

W trójkąt ABC o bokach długości $|BC| = a$, $|CA| = b$ i $|AB| = c$ wpisano okrąg o środku S i promieniu r . Niech h_A , h_B i h_C będą długościami wysokości trójkąta, poprowadzonych z wierzchołków A , B i C (odpowiednio).

1. Oblicz pola trójkątów ABS , BCS , CAS i ABC .

2. Udowodnij, że

$$\frac{a+b+c}{h_A} = \frac{a}{r}, \quad \frac{a+b+c}{h_B} = \frac{b}{r} \quad \text{i} \quad \frac{a+b+c}{h_C} = \frac{c}{r}.$$

3. Wykaż, że

$$\frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B} + \frac{1}{h_C} = \frac{1}{r}.$$

Bukiet 43

W trójkącie ABC okrąg wpisany jest styczny do boków AB , AC , BC w punktach K , L , M (odpowiednio), natomiast okrąg dopisany do boku AB jest styczny do tego boku w punkcie P , a do przedłużeń boków AC i BC w punktach Q i R . (Okrąg dopisany do trójkąta to okrąg leżący na zewnątrz trójkąta, styczny do jednego boku i przedłużeń dwóch pozostałych boków.)

1. Zrób rysunek, pozaznaczaj równe odcinki i zauważ, że

$$|AL| + |BM| = |AB| = |AQ| + |BR|.$$

2. Uzasadnij, że odcinki LQ i MR są równe.

3. Wykaż, że $|AP| = |BK|$.

Bukiet 44

W trójkącie prostokątnym ABC kąt prosty jest przy wierzchołku C . Długości boków BC , CA , AB oznaczamy przez a , b , c (odpowiednio), a promień okręgu wpisanego przez r . Niech O będzie środkiem

okręgu wpisanego, a K, L, M punktami styczności tego okręgu z bokami AC, BC, CA (odpowiednio).

1. Jakim czworokątem jest $OKCL$?

2. Uzasadnij, że

$$r = \frac{1}{2}(a + b - c).$$

3. W podobny sposób otrzymaj wzór na promień okręgu dopisanego do przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego.

Bukiet 45

1. W trójkąt o bokach długości $|BC| = a, |CA| = b, |AB| = c$ wpisano okrąg styczny do boków BC, CA, AB w punktach D, E, F (odpowiednio). Niech

$$|AE| = |AF| = x, \quad |BF| = |BD| = y, \quad |CD| = |CE| = z.$$

Mając dane a, b, c , oblicz x, y, z .

2. Czworokąt o bokach długości a, b, c, d (kolejno) jest opisany na okręgu. Udowodnij, że $a + c = b + d$.

3. Ułóż i rozwiąż zadanie podobne do zadania 1 dla pięciokąta i zadanie podobne do zadania 2 dla sześciokąta.

Bukiet 46

Rozważamy dowolny n -ką (czyli wielokąt posiadający n wierzchołków i n boków) wypukły. Prowadzimy wszystkie przekątne wychodzące z jednego wierzchołka.

1. Ile jest tych przekątnych i na ile trójkątów dzielą one nasz n -ką?

2. Dodając sumy kątów w otrzymanych trójkątach, oblicz sumę kątów n -kąta.

3. Dodając liczby przekątnych wychodzących z każdego wierzchołka oraz uwzględniając, że każda przekątna wychodzi z dwóch wierzchołków, wyprowadź wzór na liczbę przekątnych n -kąta.

Twierdzenie Talesa, trójkąty podobne

Bukiet 47

Dany jest trójkąt ABC . Przez punkt B prowadzimy prostą k równoległą do AC . Dwusieczna kąta BAC przecina odcinek BC w punkcie D , a prostą k w punkcie E .

1. Zauważ, że trójkąt ABE jest równoramienny.
2. Udowodnij, że

$$\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

3. Mając dane $|AB| = x$, $|AC| = y$ i $|BC| = z$, znajdź długości odcinków BD i CD .

Bukiet 48

W trójkącie ABC , który nie jest prostokątny, poprowadzono wysokości AD , BE i CF . Udowodnij, że:

1. $\frac{|AB|}{|AE|} = \frac{|AC|}{|AF|}$, $\frac{|BC|}{|BF|} = \frac{|BA|}{|BD|}$ i $\frac{|CA|}{|CD|} = \frac{|CB|}{|CE|}$.
2. Trójkąt ABC jest podobny do trójkąta AEF oraz do trójkątów DBF i DEC .
3. Jeśli trójkąt ABC jest ostrokątny, to półproste DA , EB i FC są dwusiecznymi kątów trójkąta DEF . Które półproste są dwusiecznymi, jeśli trójkąt ABC jest rozwartokątny?

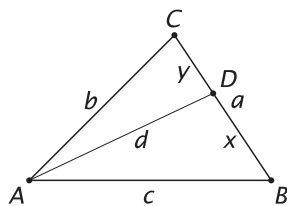
Bukiet 49

Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie P .

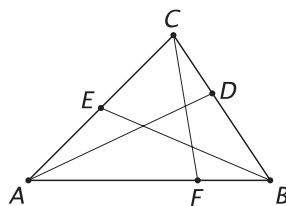
1. Uzasadnij, że trójkąty ABP i DCP są podobne.
2. Wywnioskuj stąd, że $|PA| \cdot |PC| = |PB| \cdot |PD|$.

2. Dodajmy stronami nierówności:

$$\begin{aligned}
 & d + x > c \\
 + & d + y > b \\
 \hline
 & 2d + x + y > b + c \\
 & 2d + a > b + c \\
 & 2d > b + c - a \\
 & d > \frac{1}{2} \cdot (b + c - a)
 \end{aligned}$$



Rys. 5



Rys. 6

Uwaga. Jeśli rozważamy punkt leżący na odcinku, to w zasadzie dopuszczamy też możliwość, że jest to jeden z końców odcinka. W przypadku $D = B$ w zadaniu 2 mamy nierówność

$$c > \frac{1}{2} \cdot (b + c - a), \text{ czyli } c + a > b,$$

a w przypadku $D = C$ nierówność

$$b > \frac{1}{2} \cdot (b + c - a), \text{ czyli } b + a > c.$$

3. W zadaniu 2 udowodniliśmy nierówność

$$|AD| > \frac{1}{2} \cdot (b + c - a).$$

W ten sam sposób otrzymujemy nierówności (rysunek 6)

$$|BE| > \frac{1}{2} \cdot (c + a - b) \text{ i } |CF| > \frac{1}{2} \cdot (a + b - c).$$

Po dodaniu tych trzech nierówności stronami dostajemy

$$\begin{aligned}
 |AD| + |BE| + |CF| &> \frac{1}{2} \cdot (b + c - a) + \frac{1}{2} \cdot (c + a - b) + \frac{1}{2} \cdot (a + b - c) = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot (a + b + c).
 \end{aligned}$$

Bukiet 33

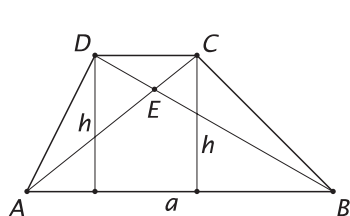
1. Zauważmy, że w trapezie $ABCD$ (rysunek 7) wysokość opuszczona z wierzchołka C na podstawę AB w trójkącie ABC jest równa

wysokości opuszczonej z wierzchołka D na podstawę AB w trójkącie ABD . Skoro trójkąty ABC i ABD mają wspólną podstawę (AB) i równe wysokości, to ich pola są równe:

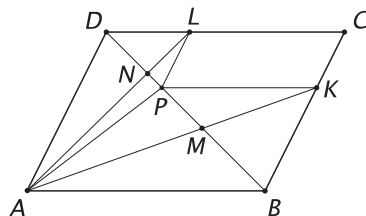
$$P_{ABC} = P_{ABD}.$$

2. Korzystając z tego, że $P_{ABC} = P_{ABD}$, mamy

$$P_{ADE} = P_{ABD} - P_{ABE} = P_{ABC} - P_{ABE} = P_{BCE}.$$



Rys. 7



Rys. 8

3. Na podstawie zadania 2, w trapezach $ABKP$ i $ADLP$ (rysunek 8) mamy równości:

$$P_{AMP} = P_{BKM}, \quad P_{ANP} = P_{DLN},$$

więc istotnie

$$P_{AMN} = P_{AMP} + P_{ANP} = P_{BKM} + P_{DLN}.$$

Bukiet 34

1. Sposób I

Weźmy trójkąt o podstawie $|AB| = a$ i wysokości $|CD| = h$ (rysunek 9). Niech $|AC| = b$. Pole trójkąta ABC oznaczmy przez P . Mamy wykazać, że

$$P \leq \frac{1}{2}ab.$$

Jeśli w trójkącie ABC kąt przy wierzchołku A jest prosty, to $b = h$, czyli

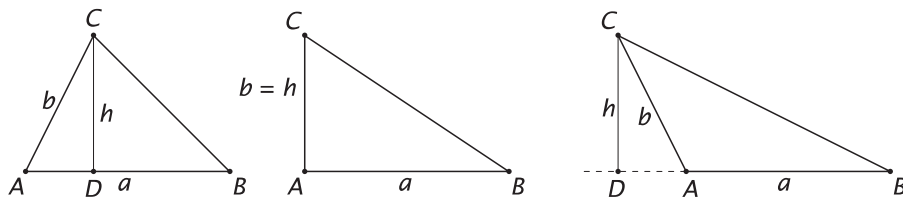
$$P = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ab.$$

Założmy teraz, że kąt A nie jest prosty. Wówczas oczywiście $|CD| < |AC|$, czyli $h < b$, zatem

$$P = \frac{1}{2}ah < \frac{1}{2}ab.$$

Wykazaliśmy, że pole trójkąta nie przekracza połowy iloczynu długości dwóch boków ($P \leq \frac{1}{2}ab$), przy czym równość ($P = \frac{1}{2}ab$)

zachodzi dokładnie wtedy, gdy kąt między tymi bokami jest prosty ($|\sphericalangle A| = 90^\circ$).



Rys. 9

Sposób II

Ze wzoru $P = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$ i własności $\sin \gamma \leq 1$ mamy

$$P = \frac{1}{2}ab \sin \gamma \leq \frac{1}{2}ab \cdot 1 = \frac{1}{2}ab,$$

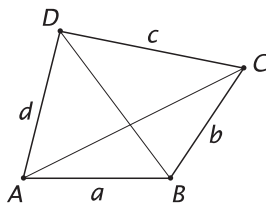
przy czym równość będzie zachodziła, gdy $\sin \gamma = 1$, czyli $\gamma = 90^\circ$.

2. Rozważmy czworokąt wypukły $ABCD$ o bokach długości a, b, c, d (rysunek 10). Na mocy zadania 1 pola trójkątów ABC i ACD spełniają nierówności:

$$P_{ABC} \leq \frac{1}{2}ab, \quad P_{ACD} \leq \frac{1}{2}cd.$$

Zatem pole P czworokąta $ABCD$ spełnia warunek

$$P = P_{ABC} + P_{ACD} \leq \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}cd = \frac{ab+cd}{2}.$$



Rys. 10

3. W zadaniu 2 udowodniliśmy, że

$$P \leq \frac{ab+cd}{2}.$$

W ten sam sposób otrzymujemy nierówność

$$P = P_{ABD} + P_{BCD} \leq \frac{ad+bc}{2}.$$

Po dodaniu tych nierówności stronami dostaniemy

$$2P \leq \frac{ab+cd+ad+bc}{2},$$



bukieTy

matematyczne

DLA GIMNAZJUM

Bukiety matematyczne?

Matematyczna łąka nie nęci pszczół zapachem kwiatów.

Rosną na niej różne gatunki zadań, które układają się w matematyczne bukiety.

Ile bukietów – tyle różnych zagadnień.

Niezastąpiona pomoc!


Każdy z bukietów to misterna kompozycja.


Głównym elementem jest klasyczne zadanie konkursowe.


W jego prawidłowym rozwiązaniu pomagają pozostałe części bukietu

– nieskomplikowane zadania pomocnicze.

Praca z książką to:

 systematyczne rozwijanie umiejętności analitycznych

 osvajanie ze specyfiką zadań konkursowych

 gwarancja sukcesu na konkursie matematycznym



GDAŃSKIE WYDAWNICTWO
OŚWIATOWE