TI–83

LEKCJE MATEMATYKI

z kalkulatorem graficznym

wersja dla kalkulatora TI

MATEMATYKA Z PLUSEM

LICEUM I TECHNIKUM

TI – 83

LEKCJE MATEMATYKI

z kalkulatorem graficznym

wersja dla kalkulatora TI

Praca zbiorowa pod redakcją
Agnieszki Orzeszek i Piotra Zarzyckiego

Autorzy scenariuszy:
Leszek Bober
Klaudia Kobus
Magdalena Majewska
Grażyna Miłosz
Irena Ołtuszyk
Teresa Dwornik - Orzechowska
Agnieszka Orzeszek
Marek Pisarski
Jolanta Schilling
Jacek Stańdo
Anna Suchodolska
Jacek Szuty
Alina Magryś - Walczak
Piotr Zarzycki
Bogdan Żółtowski

GDAŃSKIE WYDAWNICTWO
OŚWIATOWE

Redakcja: *Agnieszka Szulc*, *Jerzy Trzeciak*

Korekta: *Anna Herzog*

Okładka: *Joanna Kołyszko*

Skład (TEX): *BOP s.c., http://www.bop.com.pl*

ISBN 83-88881-61-2

Gdańsk 2003. Wydanie pierwsze

Druk i oprawa: Stella Maris, Gdańsk

Wszystkie książki Wydawnictwa dostępne są w sprzedaży wysyłkowej.

Zamówienia prosimy nadsyłać pod adresem:

Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe

80-876 Gdańsk 52, skrytka pocztowa 59

infolinia 0-801-643-917

tel./fax (58) 302-62-12, 302-59-16

http://www.gwo.pl   e-mail: gwo@gwo.pl

Spis treści

Wstęp

Kalkulatory graficzne to nowoczesny środek dydaktyczny, z powodzeniem stosowany od ponad dwudziestu lat w wielu krajach (Anglia, Austria, Francja USA). W Polsce ta techniczna „nowinka” powoli przebija się do szkół. Autorzy niniejszych scenariuszy są przekonani, że warto używać kalkulatorów na lekcjach matematyki, i mają nadzieję, że książka ta zachęci do tego zarówno nauczycieli, jak i uczniów.

Książka zawiera 14 scenariuszy lekcji matematyki dla szkoły ponadgimnazjalnej, w trakcie których używane są kalkulatory graficzne. Scenariusze są bardzo szczegółowe, gdyż opisujemy pierwsze lekcje z kalkulatorem graficznym – pierwsze zarówno dla uczniów, jak i dla nauczycieli. Każdy scenariusz zawiera opis toku jednej lub kilku lekcji na dany temat, ale także uwagi techniczne dotyczące korzystania z kalkulatora TI-83 oraz słowniczek zawierający krótkie informacje na temat komend używanych w czasie danej lekcji.

Obsługa kalkulatora to pewna liczba prostych czynności; przygotowując te materiały, kierowaliśmy się zasadą, że nie należy ich uczyć osobno, ale bezpośrednio w czasie lekcji matematyki, podając, które klawisze powinny być użyte, jakie opcje wybrane do konkretnego zadania. Oczywiście użytkownicy nie powinni zapominać o instrukcji obsługi, do której warto często zaglądać. Zwracamy uwagę na przyjętą przez nas nieco inną (w stosunku do instrukcji obsługi) konwencję zapisu dotyczącą kolejności naciskania klawiszy.

Przygotowując scenariusze, korzystaliśmy z kalkulatora graficznego TI-83, chociaż oczywiście nauczyciele używający innych typów kalkulatorów mogą bez trudu wykorzystać pomysły zawarte w tej książce, zmieniając w odpowiedni sposób komendy. Nasze scenariusz zostały także wydane w wersji dla kalkulatora CASIO CFX-9850GB.

Prezentowana książka jest pierwszą z serii *Lekcje matematyki z kalkulatorem graficznym*. Przygotowujemy następne pozycje z tej serii, m.in. scenariusze lekcji matematyki obejmujące cały materiał gimnazjum. Planujemy także wydanie scenariuszy lekcji fizyki. Każda uwaga Czytelników dotycząca niniejszej pozycji, każda informacja czy refleksja po przeprowadzonej lekcji będzie dla nas bardzo pomocna przy opracowywaniu następnych materiałów.

Na początku napisaliśmy, że technika z pewnym oporem wchodzi do polskich szkół. Spróbujmy szerzej otworzyć drzwi naszych klas dla innowacji technicznych, które rozsądnie wykorzystywane, mogą znacznie poprawić rozumienie matematyki przez uczniów i wpłynąć na lepszy jej odbiór. Przekonaliśmy się o tym sami, wykorzystując na lekcjach matematyki kalkulatory graficzne i ciesząc się, jak wiele udało się dzięki nim osiągnąć. Tą radością chcemy podzielić się z Czytelnikami.

Autorzy

5. Postać kanoniczna trójmianu kwadratowego – ćwiczenia

(czas realizacji – 1 lekcja)

Cele

- obserwacja wykresu funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2$ po przesunięciu o wektor $[p, q]$
- badanie własności funkcji kwadratowej danej w postaci $f(x) = a(x-p)^2 + q$
- ćwiczenia w budowaniu wzoru funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej na podstawie danej postaci ogólnej tej funkcji lub jej wykresu

Plan lekcji

1. Opis problemu – zadanie nr 1.
2. Rozwiązanie zadania nr 1 i sprawdzenie jego poprawności za pomocą kalkulatora.
3. Postać kanoniczna trójmianu kwadratowego $f(x) = ax^2 + bx + c$ – przypomnienie wiadomości.
4. Ćwiczenia w znajdowaniu postaci kanonicznej trójmianu kwadratowego.
5. Modelowanie rzutu piłką do kosza.
6. Zadania do samodzielnego rozwiązania.

Uwagi techniczne

Kalkulatory uczniowskie powinny być przed lekcją zresetowane ($\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{+}$ $\boxed{5}$ $\boxed{2}$ $\boxed{2}$).

Słowniczek

$\boxed{\text{Y=}}$ – wejście do edytora funkcji (aktywacja rysowania wykresów odbywa się w edytorze funkcji przez wyróżnienie znaku „=” za pomocą klawisza $\boxed{\text{ENTER}}$); grubszą linię wykresu uzyskuje się przez zmianę klawiszem $\boxed{\text{ENTER}}$ symbolu na początku linii definiującej funkcję

$\boxed{\text{GRAPH}}$ – rysowanie wykresów funkcji

`GridOn` – zaznaczanie w układzie współrzędnych punktów kratowych; wywołanie: $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{ZOOM}}$ i zatwierdzenie komendą $\boxed{\text{ENTER}}$

$\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{TRACE}}$ – odczytywanie własności funkcji z jej wykresu

WINDOW – ustawianie parametrów układu współrzędnych

MODE – ustawianie m.in. liczby cyfr po przecinku w wyświetlanej liczbie

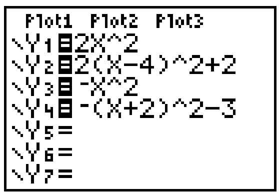
`Line` – rysowanie odcinka; wywołanie: 2nd PRGM 2, np. po napisaniu na ekranie domowym `Line(5,5,6,5)` i zatwierdzeniu (ENTER) na ekranie graficznym pojawi się odcinek o końcach $(5,5)$, $(6,5)$

Przebieg lekcji

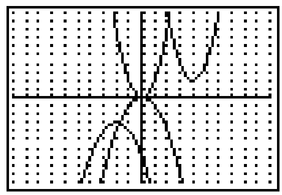
1. Opis problemu – zadanie nr 1.

Uczniowie wcześniej poznali wykres i własności funkcji $y = ax^2$, a także postać kanoniczną i ogólną trójmianu kwadratowego oraz związane z nimi wzory. Ponadto rozumieją, co to znaczy przesunąć wykres funkcji o wektor. Za pomocą urządzenia ViewScreen wyświetlamy ekran z czterema parabolami. Uczniowie widzą tylko ekran z wykresami. Dwa pozostałe ekrany to podpowiedź, w jaki sposób przygotować ten ekran dla uczniów.

2nd ZOOM ENTER



Y=



GRAPH

Zadanie nr 1

a) Połącz parabole w pary, tak aby w każdej parze jeden wykres można było otrzymać z drugiego w wyniku przesunięcia o pewien wektor.

b) W każdej parze znajdź parabolę o wzorze $y = ax^2$, tzn. oblicz współczynnik a. Zapisz wzór dla drugiej paraboli z każdej pary, to znaczy znajdź wektor przesunięcia $[p,q]$ i zapisz wzór paraboli przesuniętej.

c) Sprawdź swoje rozwiązanie na kalkulatorze.

2. Rozwiązanie zadania nr 1 i sprawdzenie jego poprawności za pomocą kalkulatora.

Do rozwiązania punktu a) wystarczy, aby uczniowie zauważyli, że stosując przesunięcia, nie można z paraboli o ramionach skierowanych ku górze uzyskać paraboli o ramionach skierowanych ku dołowi. Punkt b) uczniowie rozwiązują, znajdując współrzędne jakiegokolwiek punktu, przez który przechodzi wykres (dla paraboli $y = ax^2$), oraz wektor przesunięcia $[p,q]$ (dla paraboli $y = a(x-p)^2 + q$ najlepiej w tym celu znaleźć współrzędne wierzchołków obu parabol).

3. Postać kanoniczna trójmianu kwadratowego $f(x) = ax^2 + bx + c$ – przypomnienie wiadomości.

Przypominamy uczniom o tym, że każdy trójmian kwadratowy można przedstawić w postaci $f(x) = a(x-p)^2 + q$, która nosi nazwę postaci kanonicznej. Warto w tym momencie lekcji zadać pytania:

- W jaki sposób z wykresu funkcji $g(x) = ax^2$ otrzymać wykres funkcji $f(x) = a(x-p)^2 + q$?
- Jakie są współrzędne wierzchołka paraboli $f(x) = a(x-p)^2 + q$?
- Jaka jest najmniejsza (największa) wartość funkcji $f(x) = a(x-p)^2 + q$?

Warto też powiedzieć o zaletach postaci kanonicznej trójmianu kwadratowego: łatwość sporządzania wykresu, określania zbioru wartości i przedziałów monotoniczności, możliwość szybkiego obliczania miejsc zerowych. Wspólnie z uczniami przypominamy też wzory i sposoby algebraiczne pozwalające przekształcać postać ogólną trójmianu kwadratowego na postać kanoniczną. Wiadomości te zostaną wykorzystane w zadaniu nr 2.

4. Ćwiczenia w znajdowaniu postaci kanonicznej trójmianu kwadratowego.

Zadanie nr 2

Znajdź postać kanoniczną trójmianu kwadratowego:

a) $f(x) = x^2 + 2x + 1$

b) $f(x) = x^2 + 2x + 2$

c) $f(x) = x^2 + 4x + 4$

d) $f(x) = x^2 + 4x + 7$

e) $f(x) = 2x^2 + 4x + 2$

f) $f(x) = 2x^2 + 4x + 8$

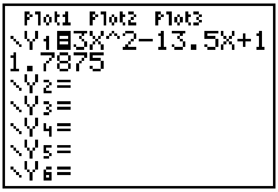
Sprawdź swoje rozwiązania za pomocą kalkulatora.

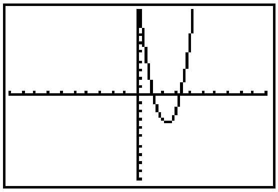
Uczniom biegłym w przekształceniach algebraicznych nie należy narzucać korzystania z kalkulatora jako sposobu rozwiązania tego zadania. Niektórzy uczniowie mogą jednak rozwiązywać to zadanie za pomocą kalkulatora, wpisując w edytorze $\boxed{\text{Y=}}$ wzory funkcji kwadratowych w postaci kanonicznej metodą prób i błędów (wykresy danej funkcji i funkcji w postaci kanonicznej powinny się pokryć).

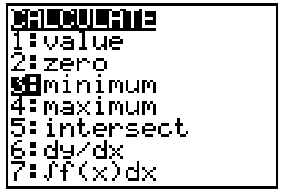
Zadanie nr 3

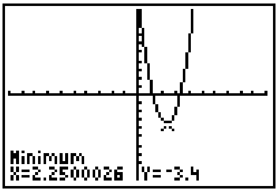
Narysuj za pomocą kalkulatora wykres funkcji kwadratowej $f(x) = 3x^2 - 13{,}5x + 11{,}7875$. Na podstawie tego wykresu zapisz jej postać kanoniczną.

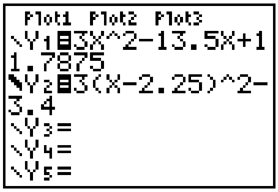
Wzór jest celowo dość skomplikowany. Chcemy w ten sposób zachęcić ucznia do posłużenia się kalkulatorem. Uczniowie wpisują wzór do edytora funkcji $\boxed{\text{Y=}}$, rysują wykres za pomocą opcji $\boxed{\text{GRAPH}}$ i odczytują współrzędne wierzchołka otrzymanej paraboli, wykorzystując $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{TRACE}}$ $\boxed{3}$. Następnie piszą w edytorze $\boxed{\text{Y=}}$ wzór funkcji f w postaci kanonicznej i sprawdzają poprawność odpowiedzi przez narysowanie wykresu. Kolejne etapy rozwiązania przedstawione są na poniższych ekranach.

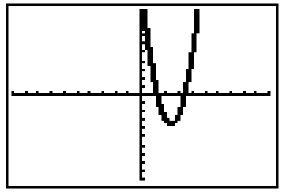












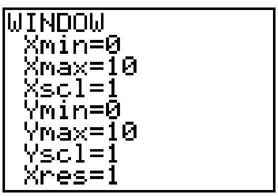
5. Modelowanie rzutu piłką do kosza.

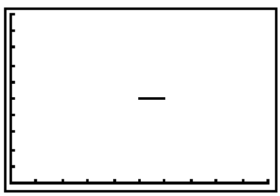
Zadanie nr 4

Narysuj wykres będący torem lotu piłki koszykowej trafiającej do kosza.

W wyniku dyskusji uczniowie dochodzą do wniosku, że piłka koszykowa porusza się po paraboli. Przyjmują założenia, że koszykarz rzucający piłkę stoi w początku układu współrzędnych, a modelem kosza jest odcinek o końcach $A = (5, 5)$ i $B = (6, 5)$. Zakładają, że piłka trafia do kosza w części „opadającej” swojego lotu. Wnioskują stąd, że współczynnik a musi być ujemny. Następnie zapisują te ustalenia w kalkulatorze.

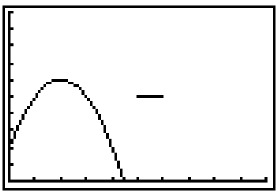
W opcji [MODE] ustawiają wyświetlanie cyfr z dokładnością do jednego miejsca po przecinku (należy kliknąć klawisz [MODE], wejść na `Float`, następnie na 1 i zatwierdzić zmianę klawiszem [ENTER]). Model kosza (odcinek AB) rysują, przechodząc do ekranu domowego ([2nd] [MODE]), wciskając klawisze [2nd] [PRGM] [2] i pisząc współrzędne punktów A i B (zatwierdzenie polecenia – klawisz [ENTER]). Parametry okna przedstawione są poniżej.



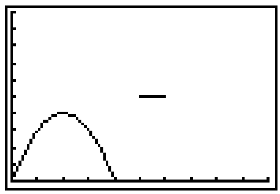


Teraz uczniowie wpisują w edytorze [Y=] wzór paraboli, która miałaby z odcinkiem punkt wspólny. Łatwo zauważą, że wierzchołek tej paraboli nie może być położony w początku układu, lecz musi leżeć w I ćwiartce. Należy zatem przesunąć parabolę $f(x) = ax^2$ o pewien wektor $[p, q]$ o dodatnich składowych. Pojawia się więc wzór $f(x) = a(x - p)^2 + q$. Można przyjąć, uwzględniając poprzednie obserwacje, że np. $a = -1$. Jeśli weźmiemy np. $f(x) = -(x - 2)^2 + 6$, to można zauważyć (rysując wykres tej funkcji – ekran nr 1), że otrzymana parabola nie przechodzi przez początek układu. Uczniowie powinni dojść do wniosku, że aby ten defekt nie wystąpił, musi zachodzić równość $p^2 = q$; np. wykres funkcji $f(x) = -(x - 2)^2 + 4$ (ekran nr 2) przechodzi już przez początek układu, ale nie ma z danym odcinkiem punktu wspólnego. Uczniowie łatwo zauważą, że piłka uderzy w „obręcz", jeśli $f(5) = 5$ lub $f(6) = 5$. W pierwszym z tych przypadków $p = 3$, w drugim $p = \frac{41}{12}$. Uogólniając, aby piłka wyrzucona z początku układu trafiła do kosza, powinna poruszać się po paraboli o równaniu $y = -(x - p)^2 + p^2$ dla $p \in (3; \frac{41}{12})$. Oczywiście wynik będzie inny, gdy za a podstawimy inną liczbę niż -1.

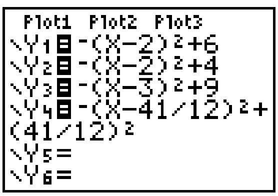
(1)



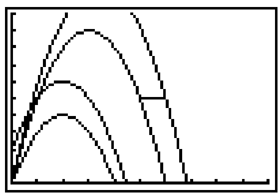
(2)



(3)



(4)



6. Zadania do samodzielnego rozwiązania.

Zadanie nr 5

Narysuj za pomocą kalkulatora wykres funkcji kwadratowej $f(x) = -2x^2 - 10{,}8x + 11{,}55$. Na podstawie tego wykresu zapisz jej postać kanoniczną.

Zadanie nr 6

Rozpatrz przypadek rzutu do kosza dla funkcji $f(x) = -2(x - p)^2 + q$.

Zadanie nr 7

Wyznacz punkt wspólny rodziny parabol $f(x) = a(x + 3)^2 - 2$.

ISBN 83-88881-61-2

Matematyka bez kalkulatora to czasem marsz boso po śniegu z butami w plecaku.

Zalety pracy z kalkulatorami graficznymi zna niemal każdy nauczyciel. Jeśli jeszcze ich nie docenił, być może powodem jest brak tej książki.

Poradnik jest przeznaczony dla nauczycieli szkół ponadgimnazjalnych. Zawiera 14 scenariuszy lekcji opracowanych tak, by służyć pomocą zarówno początkującym, jak i tym, którzy mają już doświadczenie w pracy z kalkulatorami.

Każdy scenariusz to:
- szczegółowy opis toku lekcji,
- jasne i precyzyjne uwagi techniczne na temat korzystania z kalkulatora,
- słowniczek komend używanych w trakcie wykonywania zadań.

Autorzy książki to doświadczeni nauczyciele matematyki. Już dawno wyjęli buty z plecaków. Idzie im się znacznie szybciej.

Książka została wydana w dwóch wersjach: dla użytkowników kalkulatorów TI-83 i CASIO CFX-9850GB.

GDAŃSKIE WYDAWNICTWO OŚWIATOWE