Matematyka w Szkole

CZASOPISMO DLA NAUCZYCIELI SZKÓŁ ŚREDNICH

numer sygnalny ISSN 1642-3550 egzemplarz bezpłatny jesień 2001

Nowa matura

Liceum profilowane

Szkoła w USA

SPIS TREŚCI

REFORMA

NAUCZANIE MATEMATYKI

MATERIAŁY

Z OSTATNIEJ ŁAWKI

Magdalena Nowicka

Odkrywamy granicę ciągu

Nigdy nie miałam wątpliwości, że w klasach matematyczno-fizycznych powinnam wymagać od uczniów znajomości i zrozumienia definicji granicy ciągu. Ale w pozostałych klasach? Większość uczniów nie jest w stanie szybko zrozumieć trzech kwantyfikatorów, a przy tym czasu mamy bardzo mało. Niektórzy, owszem, byli w stanie *zapamiętać* treść definicji, ale nie wiedzieli, o co w niej chodzi. Dlatego postanowiłam zrezygnować w klasach niematematycznych z podawania definicji granicy, a zamiast tego – wyjaśnić, o co w tym pojęciu chodzi. Pomyślałam, że najlepiej poznawać nowe pojęcie przez doświadczenie.

Na pierwszą lekcję na temat granic uczniowie przynieśli kalkulatory, w miarę możliwości zaawansowane. Uczniowie podzielili się na kilkuosobowe grupki, z których każda dysponowała jednym lepszym kalkulatorem (z potęgowaniem i funkcjami trygonometrycznymi) i ewentualnie dodatkowo jednym–dwoma prostszymi.

Można było zacząć ćwiczenia.

Pierwiastek pierwiastka...

Najpierw każda grupka miała wpisać do kalkulatora dowolną liczbę większą od 1, a następnie wciskać wielokrotnie klawisz pierwiastka i obserwować, jak zachowuje się liczba na wyświetlaczu. Uczniowie zauważyli po pierwsze, że w okienku pojawiają się coraz mniejsze liczby. Ponieważ o ciągach była mowa już wcześniej, ktoś nawet wyraził się uczenie „dostaliśmy ciąg malejący".

Zapytałam, czy wobec tego kiedyś dostaną zero albo liczbę ujemną. Nie wszyscy byli pewni, więc przyciskali dalej, aż w końcu wynik ustabilizował się na wartości 1. Teraz przyszła pora na najtrudniejszą rzecz: zapytałam, czy pierwiastek liczby większej od 1 może być równy 1. Oczywiście nie, bo $1^2 = 1$. Dlaczego więc taka liczba się wyświetliła? Bo kalkulator nie jest dokładny: wyświetla tylko 7 (czy 9) cyfr po przecinku. Gdyby nie to przybliżanie liczb przez kalkulator, moglibyśmy wciskać klawisz pierwiastka dowolnie długo, a w okienku pojawiałoby się zawsze coś większego od 1, tyle że byłoby to 1, przecinek, dużo zer i dopiero bardzo daleko jakieś niezerowe cyfry.

Podsumowałam doświadczenie: nasz ciąg – gdyby obliczać pierwiastki dokładnie – wprawdzie nie dochodzi do jedynki, ale do niej *dąży*, jedynka to *granica* tego ciągu. Ponieważ słowa *dążyć* i *granica* występują także w języku potocznym, takie zdanie spotkało się ze zrozumieniem uczniów.

Zapytałam, co by było, gdybyśmy zaczęli od liczby z przedziału (0,1). Niektórzy uczniowie sądzili, że granicą będzie zero, ale sami łatwo sprawdzili, że jest inaczej: granicą dalej jest jedynka, tyle że ciąg jest rosnący.

Inne przykłady

Teraz napisałam na tablicy kilka przykładów:

$a_n = \frac{1}{n}$

$b_n = \sin n$

$c_n = n \sin \frac{1}{n}$

$d_n = \frac{\sin n}{n}$

$e_n = (1 + \frac{1}{n})n$

Uczniowie mieli za zadanie obliczyć kilkanaście wyrazów każdego z ciągów (ale nie kolejnych, żeby zobaczyć, co się dzieje np. dla $n = 100$). Większość nie potrzebowała kalkulatora, aby stwierdzić, jaka jest granica ciągu (a_n). W następnych trzech wypadkach trzeba już było skorzystać z tego urządzenia (przełączając je na radiany!). Przykład (b_n) przekonał uczniów, że nie każdy ciąg ma granicę.

Największe trudności sprawił oczywiście ciąg (e_n). Uczniowie na podstawie kilku wyrazów stwierdzali, że granicą jest liczba 3. Poproszeni o znalezienie takiego n, przy którym wyrazy przekroczą 2,9, próbowali kilku bardzo dużych liczb i wycofywali się z pierwotnej hipotezy. Oczywiście musiałam powiedzieć, że granica tego ciągu jest pewną liczbą niewymierną.

Dalej nie zajmowaliśmy się liczbą e, ale ten przykład pozwolił sformułować ważną cechę pojęcia granicy: wyrazy muszą się nie tylko do niej zbliżać (wyrazy tego ciągu rzeczywiście zbliżają się do trójki, podobnie jak do czwórki albo liczby 1953), ale powinny się zbliżać *dowolnie blisko*.

Od pewnego wyrazu... wszystkie następne...

Teraz wystarczył jeszcze jeden przykład: ciąg (f_n) o wyrazach równych $\frac{1}{n}$ dla n parzystego i równych 5000 dla n nieparzystego. Czy jego granicą jest zero? Na podstawie dotychczasowych stwierdzeń można było powiedzieć, że tak: możemy znaleźć wyrazy dowolnie bliskie zera. Ale jednak większość uczniów twierdziła, że zera nie można tu nazwać granicą. Mogliśmy więc powiedzieć: chcemy, żeby *od pewnego* wyrazu *wszystkie* były już coraz bliżej granicy, a nie tylko niektóre.

Różnica poziomów

W klasach niematematycznych tyle wystarczyło. Po jednej lekcji uczniowie już *rozumieli*, co to jest granica ciągu. Bez formalnej definicji granicy nie mogłam wprawdzie udowodnić wzorów na granicę sumy itd., ale przecież i tak od dawna tego nie robiłam: dwie godziny tygodniowo to stanowczo zbyt mało, aby przeciętnemu uczniowi wyjaśnić niuanse związane z zastępowaniem ε przez $\frac{\varepsilon}{2}$.

Chociaż najpierw myślałam, że doświadczenia nie przydadzą się w klasach matematyczno-fizycznych, uznałam, że mogę je zastosować również tam. Różnica polegała na tym, że po nabyciu intuicyjnego zrozumienia mogliśmy podsumować nasze określenie granicy w postaci definicji. Kwantyfikatory nabrały dla uczniów całkiem realnego znaczenia. ■

Marcin Karpiński

O dowodzie, którego dzieci nie powinny oglądać

Kiedy uczniowie są w stanie zrozumieć poważne dowody twierdzeń? Na pewno nie na początku pierwszej klasy. A przecież właśnie wtedy jest w podręcznikach dowód niewymierności liczby $\sqrt{2}$.

Oni nie chcą dowodu

Nasi uczniowie na ogół wierzą w to, co im mówimy na lekcjach (przynajmniej jeśli chodzi o treści matematyczne). Nie wymagają, byśmy dowodzili prawdziwości swoich słów. Tak jest na całym świecie. Mój znajomy przez kilka lat uczył studentów wydziału pewnego amerykańskiego uniwersytetu. Stosunek swoich uczniów do dowodzenia opisywał tak[1]:
Żądanie dowodu twierdzenia matematycznego jest wbrew naturze Amerykanina. Oni nie chcą, żebym dowodził tego, co publicznie oświadczam. Udowadnianie prawdziwości własnych słów jest obelgą dla godności obu zaangażowanych stron. Oni mają do mnie pełne zaufanie i skoro ja mówię, że bubble-sort *ma kwadratowy czas działania, to oni mi wierzą. Jeślibym ich oszukał, zawsze mogą mnie pozwać przed sąd. To jest o wiele lepsza rękojmia rzetelności niż te wszystkie dowody, z których i tak nic się nie da zrozumieć.*

Dowód niewprost to dla uczniów dowód niejasny

Gdy przed wielu już, niestety, laty zaczynałem uczyć w liceum, na początku pierwszej klasy należało pokazać dzieciom dowód niewymierności liczby $\sqrt{2}$. Pamiętam, że wówczas ucieszyłem się, że będę mógł przekazać szczegóły tak wspaniałego i prostego tematu. Jakże byłem naiwny! Oczywiście, prawie nikt nie był w stanie pojąć, na czym polega rozumowanie. Uczniowie mieli nawet do mnie żal, że zamiast wprost powiedzieć o co chodzi, kręcę i upieram się, że właśnie na tym to polega, że jest nie wprost.
Poza tym, oni od dawna wiedzieli, że $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną – pani w szkole podstawowej im to powiedziała. Nie rozumieli, dlaczego teraz trzeba to udowadniać. Byli tak samo zdumieni, jak ja i moi koledzy na studiach, gdy wykładowca na pierwszym wykładzie udowodnił, że $1 \neq 0$.
Nie wiem, kto wpadł na pomysł, by pierwszy pełny dowód, jaki uczniowie zobaczą, prowadzony był metodą sprowadzenia do sprzeczności. Naprawdę niewiele osób w tym wieku pojmuje, że jeśli doprowadzimy do sprzeczności, to właśnie bardzo dobrze i kończymy dowód.
Nigdy więcej nie powtórzyłem błędu – uznałem, że w przeciętnej klasie ogólnej nie można wymagać zrozumienia tak zawiłych dowodów. Nie widziałem żadnej tragedii w tym, że w niewymierność $\sqrt{2}$ uczniowie muszą uwierzyć. W końcu i tak nie pokazujemy na ogół niewymierności $\sqrt[3]{2}$ czy liczby π i nic strasznego się nie dzieje. W dal-

szym toku nauczania nie ma większego znaczenia, czy to są liczby wymierne, czy niewymierne.

Można inaczej

Czy to oznacza, że uczniowie liceum nigdy nie poznają dowodu niewymierności jakiejś liczby, że zawsze będą musieli w tę niewymierność tylko uwierzyć? Tak mi się przez jakiś czas wydawało.

Aż tu niespodziewanie, przy okazji omawiania twierdzenia o pierwiastkach wymiernych wielomianów, zorientowałem się, że jest prosty sposób pokazania niewymierności $\sqrt{2}$ i wielu innych liczb (nie tylko postaci $\sqrt{p}$). Oto ten dowód.

Liczba $\sqrt{2}$ jest oczywiście rozwiązaniem równania

$$x^2 - 2 = 0.$$

Jednak równanie to nie ma rozwiązań wymiernych, bo zgodnie ze wspomnianym twierdzeniem (zob. tekst w ramce), wymiernymi rozwiązaniami mogłyby być ewentualnie tylko liczby -1, 1, -2 lub 2. W takim razie nie jest liczbą wymierną. I to już koniec dowodu.

Wiem, że z formalnego punktu widzenia powyższy dowód jest bardziej skomplikowany niż ten klasyczny. Korzystamy przecież z bardzo zaawansowanego twierdzenia, którego uczniowie nie są w stanie samodzielnie udowodnić. Ale dla uczniów to rozumowanie jest prostsze. Nie przeszkadza im, że korzystamy z trudnego twierdzenia, bo oswoili się już z nim w wielu wcześniej rozwiązanych przykładach.

Twierdzenie o pierwiastkach wymiernych.

Jeśli liczba wymierna $\frac{p}{q}$ (ułamek nieskracalny) różna od zera jest pierwiastkiem równania:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

o współczynnikach całkowitych, to p jest podzielnikiem wyrazu wolnego, natomiast q jest podzielnikiem współczynnika przy najwyższej potędze niewiadomej.

Poza tym, łatwo powtórzyć ten dowód dla innych liczb. Moi uczniowie nie mieli problemu ze skopiowaniem go dla $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2}$ czy $\sqrt[5]{17}$. Spróbujcie na swoich lekcjach.

Stefan Sokołowski, *Uczyć cudze dzieci*, www.ipipan.gda.pl/~stefan/.

Na podstawie anegdoty nadesłanej przez panią Danutę Cembrzyńską

Konkurs dla uważnych Czytelników

W każdym numerze publikować będziemy pytania *Konkursu dla uważnych Czytelników*. Odpowiedzi będzie można znaleźć w danym numerze po uważnym poszukaniu. Osoba, która odpowie prawidłowo, otrzyma nagrodę.
W tym numerze pytamy: O jakim zjeździe mowa w poniższym cytacie? W którym roku się odbył?

Zjazd uznał za konieczne podniesienie samodzielności i aktywności uczniów, a także zwiększenie obrazowości nauczania na wszystkich szczeblach.

W wypadku większej liczby poprawnych odpowiedzi o przyznaniu nagrody zdecyduje losowanie. A nagroda jest nie byle jaka: kalkulator Casio z działaniami na ułamkach zwykłych ufundowany przez firmę ZIBI. Odpowiedzi prosimy przesyłać do końca listopada pod adresem redakcji.

Matematyka w Szkole

Czasopismo dla nauczycieli szkół średnich

Adres redakcji:
Gdańsk, ul. Trzy Lipy 3,
tel./fax (0-58) 302-59-16 w. 180

Dział handlowy:
tel. (0-801) 64-39-17

Adres do korespondencji:
Matematyka w Szkole
Czasopismo dla nauczycieli
szkół średnich
skr. poczt. 59
80-876 Gdańsk 52

e-mail: gazetamws@gwo.com.pl
http://www.gwo.com.pl

Redaktor naczelny:
Marcin Braun

Wydawca:
Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe,
Gdańsk, ul. Trzy Lipy 3

Redaguje kolegium:
Marcin Braun
Aleksandra Golecka
Marcin Karpiński
Joanna Kniter
Jacek Lech
Elżbieta Stawiarz

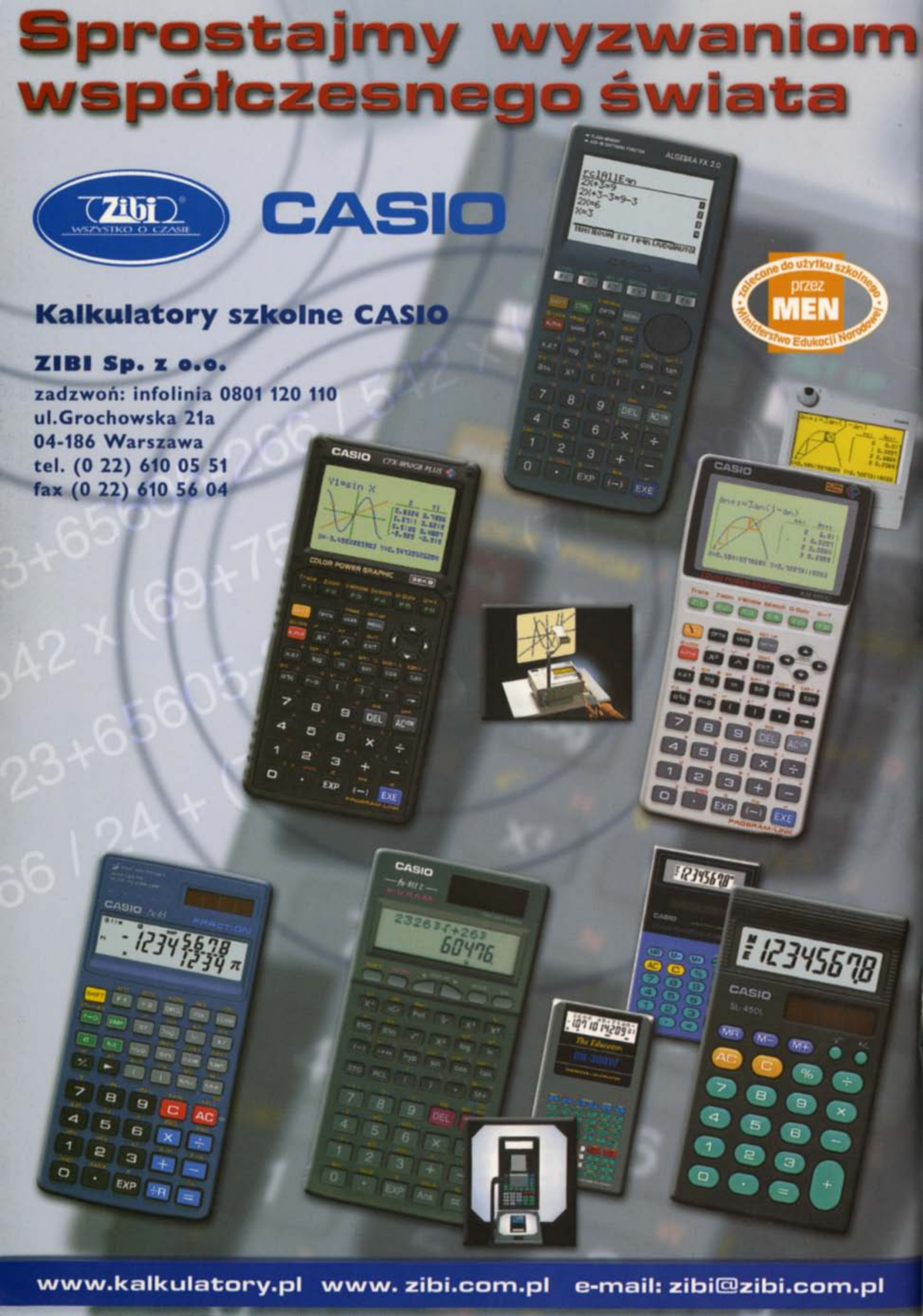
Projekt graficzny, okładka, ilustracje:
Sławomir Kilian

Skład:
Maria Chojnicka

Zdjęcie na okładce:
Leszek Jakubowski

Druk i oprawa:
Stella Maris

Nakład:
6000 egz.


Sprostajmy wyzwaniom współczesnego świata
Zibi WSZYSTKO O CZASIE
CASIO
Kalkulatory szkolne CASIO
ZIBI Sp. z o.o.
zadzwoń: infolinia 0801 120 110
ul.Grochowska 21a
04-186 Warszawa
tel. (0 22) 610 05 51
fax (0 22) 610 56 04
zalecone do użytku szkolnego przez MEN Ministerstwo Edukacji Narodowej
www.kalkulatory.pl www. zibi.com.pl e-mail: zibi@zibi.com.pl