

Matematyka

CZASOPISMO DLA NAUCZYCIELI SZKÓŁ ŚREDNICH

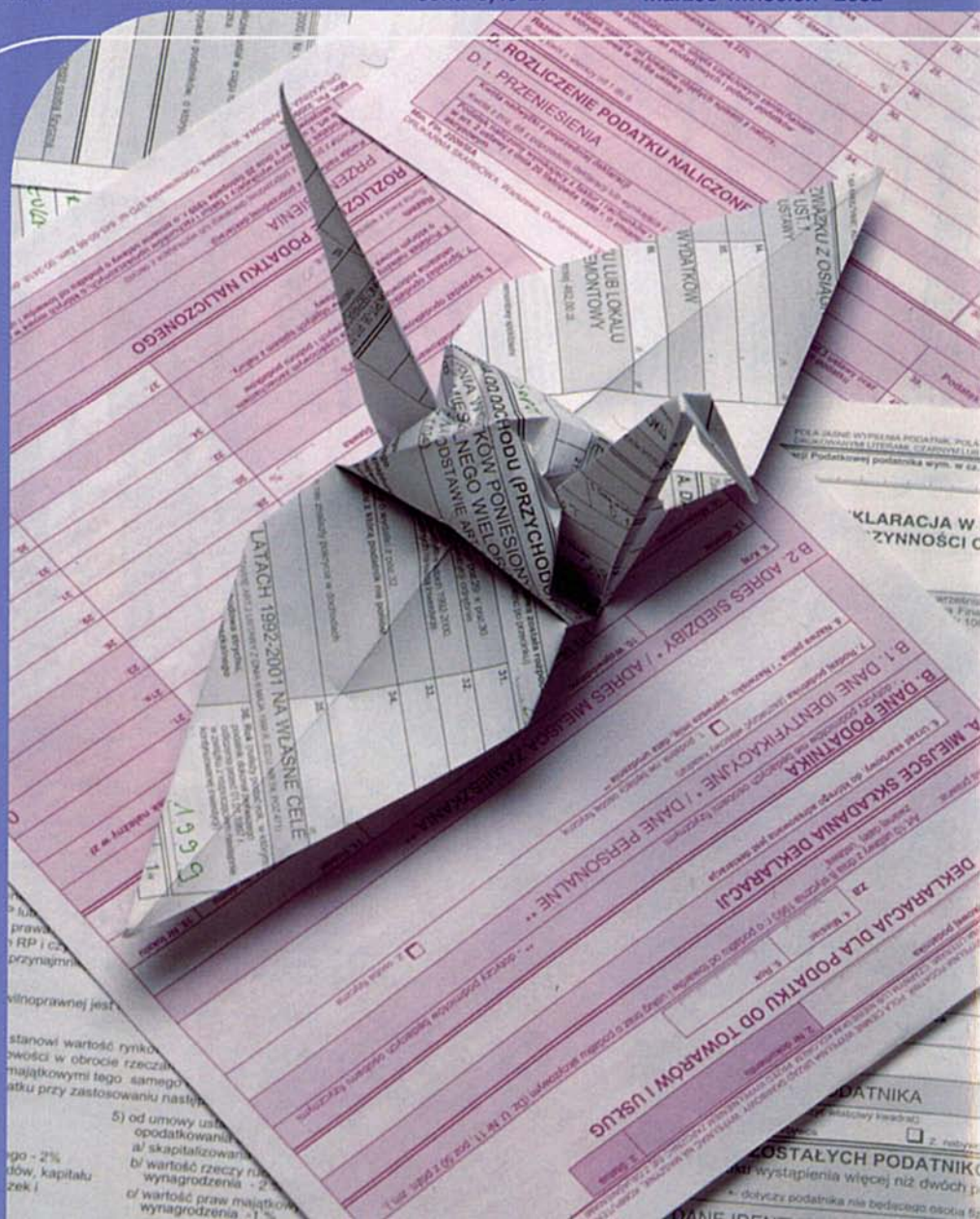
w Szkole

nr 2

ISSN 1642-3550

cena 6,40 zł

marzec-kwiecień 2002



Podatek
i klamerka

Sinusoidy
wokół nas

Nie taki
parametr
straszny

SPIS TREŚCI

REFORMA

<i>Rudolf Łoś: Nie powtarzajmy błędów</i>	3
<i>Marcin Braun, Marcin Karpiński, Jacek Lech:</i> Nie tylko dla jednego promila	4

NAUCZANIE MATEMATYKI

<i>Danuta Zaremba: O odwracaniu kota ogonem</i>	6
<i>Grażyna Miłoś: Szukanie funkcji</i>	8
<i>Zofia Dam: Wykres funkcji $y = a \sin x + b \cos x$</i>	10
<i>Danuta Buniecka: Nie tylko ciekawostka</i>	11
<i>Monika Zdrojnik: Pochodna wykresu?</i>	12
<i>Łukasz Poprzeczka: Podatek i klamerka</i>	14
<i>Jacek Lech: Artyści kombinują</i>	16
<i>Jakub Michalski: Drugi wymiar rulonu</i>	18
<i>Iwona Potocka: Nie taki parametr straszny...</i>	20
<i>Teresa Jaworska: Pomocny przekrój</i>	21
<i>Iwona Potocka: Egipska seria</i>	22
<i>Agnieszka Piecewska-Łoś: Klin klinem...</i>	24
<i>Jacek Lech: List z Ameryki</i>	26
List od Czytelnika	28

MATERIAŁY

Podstawa programowa	29
<i>Krzysztof Kutek: Stara matura</i>	33

Z OSTATNIEJ ŁAWKI

Matematyka jest wszędzie, logika – niekoniecznie	46
--	----

INFORMACJE O PRENUMERACIE – STR. 2

O odwracaniu kota ogonem

...czyli korzystaniu z twierdzeń prostych i odwrotnych.

W podręcznikach gimnazjalnych, po twierdzeniu Pitagorasa i twierdzeniu do niego odwrotnym, znajdujemy pytania, czy trójkąt o danych bokach jest prostokątny. Uczniowie sprawdzają, czy suma kwadratów dwóch krótszych boków jest równa kwadratowi dłuższego; w przypadku równości odpowiadają, że trójkąt jest prostokątny, a w przeciwnym przypadku – że nie jest. I to jest, oczywiście, dobra odpowiedź. Gdyby jednak zapytać uczniów, w jaki sposób i z jakich twierdzeń korzystają w poszczególnych przypadkach, zapewne nie potrafiliby dać poprawnej odpowiedzi.

Nic dziwnego, wiele osób ma kłopoty z uzasadnieniem, że trójkąt, w którym suma kwadratów dwóch krótszych boków jest różna od kwadratu najdłuższego boku, nie jest prostokątny. Dostyc powszechnie jest tu popełniany pewien błąd logiczny. I to jest właśnie powód mojego artykułu.

Czy ma rację?

Na początek proponuję Czytelnikom sprawdzenie, czy sami tego błędu nie popełniają. Proszę mianowicie ocenić poprawność hipotetycznego rozumowania ucznia, który mówi tak:

„Liczby 2, 5, 6 nie są długościami boków trójkąta prostokątnego. Wynika to z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa: jeżeli suma kwadratów dwóch liczb jest równa kwadratowi trzeciej liczby, to liczby te są długościami boków trójkąta prostokątnego. W naszym przypadku założe-

nie tego twierdzenia nie jest spełnione ($2^2 + 5^2 \neq 6^2$), a więc także i teza nie jest spełniona, czyli trójkąt nie jest prostokątny”.

Tych, którzy akceptują rozumowanie ucznia, zapytuję, kiedy wolno skorzystać z danego twierdzenia, tzn. co trzeba sprawdzić, aby wywnioskować, że jego teza jest prawdziwa. Oczywiście trzeba sprawdzić, czy założenie twierdzenia jest spełnione.



Założeniem twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa jest to, że suma kwadratów dwóch krótszych boków trójkąta jest równa kwadratowi najdłuższego boku. Nie można więc stosować tego twierdzenia w przypadku boków o długościach 2, 5 i 6.

Nie zawsze można odwrócić

Każde twierdzenie mające postać implikacji mówi, że teza jest prawdziwa, jeżeli spełnione jest założenie; nie mówi natomiast nic o prawdziwości tezy w przypadku niespełnienia założenia i dlatego wtedy nie

można z niego skorzystać. Zilustrujmy to przykładem następującego twierdzenia:

Jeżeli liczba naturalna jest podzielna przez 4, to jest podzielna przez 2.

Twierdzenie to pozwala wnioskować o podzielności przez 2 każdej liczby podzielnej przez 4, ale nie pozwala wnioskować o niepodzielności liczby przez 2 w przypadku, kiedy nie jest ona podzielna przez 4. Jak wiadomo, może być różnie.

Analogicznie: na podstawie twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa możemy stwierdzić, że trójkąt o bokach 3, 4 i 5 jest prostokątny, natomiast nic nie możemy powiedzieć o trójkącie o bokach 2, 5 i 6. Trzeba tu skorzystać z twierdzenia Pitagorasa, rozumując nie wprost:

Gdyby trójkąt był prostokątny, wówczas suma kwadratów dwóch krótszych boków byłaby równa kwadratowi dłuższego – a tak nie jest.

Z formalnego punktu widzenia rozumowanie to oznacza skorzystanie z kontrapozycji (inaczej zwanej twierdzeniem przeciwnym) twierdzenia Pitagorasa:

Jeżeli suma kwadratów dwóch krótszych boków nie jest równa kwadratowi dłuższego, to trójkąt nie jest prostokątny.

Jak wiadomo, każda implikacja jest równoważna swojej kontrapozycji.

Kontrapozycja na co dzień

Jak poradzić sobie na lekcjach matematyki z tymi logicznymi zawłościami? Wbrew powszechnej opinii myślę, że można próbować rozumowania nie wprost. Uczniowie są w stanie

tak rozumować w odniesieniu do prostych sytuacji życiowych. Oto przykład:

W myśl regulaminu konkursu matematycznego „Tęga głowa” każdy uczestnik, który w pierwszym etapie konkursu otrzyma co najmniej 20 punktów, zostanie zakwalifikowany do drugiego etapu. Alojzy Małolepszy, który startował w pierwszym etapie, nie został zakwalifikowany do drugiego.



Jak uzasadnić, że Alojzy Małolepszy otrzymał w pierwszym etapie konkursu mniej niż 20 punktów?

Oczywiście tak:

Gdyby otrzymał co najmniej 20 punktów, to zakwalifikował by się do drugiego etapu, a tak się nie stało.

Analogicznie jest w przypadku twierdzenia Talesa i twierdzenia do niego odwrotnego, kiedy pytamy, czy proste odcinające na ramionach kąta dane odcinki są równoległe. W przypadku odcinków nieproporcjonalnych trzeba powołać się na twierdzenie Talesa (dokładniej: na jego kontrapozycję), a w przypadku odcinków proporcjonalnych na twierdzenie odwrotne. ■

Szukanie funkcji

Zadania pomagające w zrozumieniu funkcji trygonometrycznych.

Przy okazji omawiania wykresów funkcji trygonometrycznych uczymy, jak na podstawie wzoru funkcji określić okres, amplitudę oraz wartość największą i najmniejszą funkcji typu:

$$f(x) = 1 - 2 \sin(2x),$$

$$f(x) = -4 - 3 \cos(4x - 2),$$

$$f(x) = 2 \cos(4(x - 2)) + 1.$$

Jeśli dysponujemy kalkulatorem graficznym lub komputerem z odpowiednim oprogramowaniem, możemy rozważania teoretyczne wesprzeć wykresami. (Wykresy takich funkcji uczniowie powinni umieć narysować także ręcznie, przekształcając wykresy funkcji sinus i cosinus, ale w tym wypadku kalkulator czy komputer pozwala zaoszczędzić czas).

A może na odwrót?

Dość rzadko jednak rozwiązujemy zadania odwrotne, polegające na szukaniu funkcji, której własności są dane. Sprawiają one z reguły więcej kłopotów, ale za to pogłębiają rozumienie pojęcia, pozwalają lepiej ocenić znaczenie poszczególnych parametrów. Oto przykład:

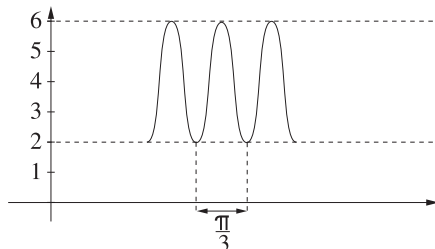
Ćwiczenie 1.

Napisz wzór funkcji postaci

$$f(x) = a \sin(kx) + q,$$

której wartość maksymalna wynosi 6, minimalna 2, a okres jest równy $\frac{\pi}{3}$.

Na początek można naszkicować, jak w przybliżeniu powinien wyglądać wykres szukanej funkcji.



Co zrobić z wykresem funkcji sinus, aby przyjął taką postać? Trzeba go sześciokrotnie „zagęścić” (a więc $k = 6$), rozciągnąć dwukrotnie w pionie (więc $a = 2$) i podnieść o cztery jednostki do góry (więc $q = 4$). Wzór funkcji ma więc postać $f(x) = 2 \sin(6x) + 4$.

Przed tego typu przykładami warto zadać uczniom ćwiczenie typu „Ustal wzór funkcji przedstawionej na wykresie”. Bardzo pomocny w tworzeniu wykresów może być komputer albo kalkulator graficzny.

Zastosowania

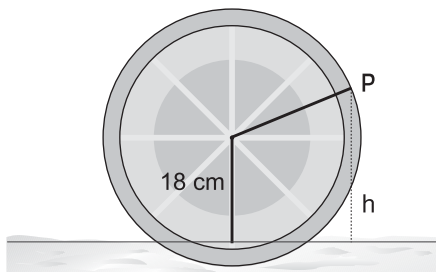
Wiele zjawisk występujących w przyrodzie można opisać za pomocą funkcji trygonometrycznych: ruch wahadła, drgania kamertonu, napięcie prądu zmiennego, przyływy i odpływy oceanów.

Przejdźmy zatem do bardziej praktycznych zadań. Zmierzymy się teraz z następującym problemem:

Ćwiczenie 2.

Koło wodne o promieniu 21 cm i zanurzeniu 3 cm wykonuje 6 pełnych obrotów na minutę. Obserwujemy położenie punktu P na brzegu koła. Po dwóch sekundach od rozpoczęcia obserwacji punkt P znalazł się w naj-

wyższym położeniu. Znajdź zależność opisującą wysokość h punktu P nad powierzchnią wody w zależności od czasu upływającego od rozpoczęcia obserwacji koła.



Po pierwsze musimy zauważyć, że wysokość h zmienia się w czasie sinusoidalnie. Łatwo to uzasadnić, np. posługując się definicją funkcji sinus czy cosinus za pomocą koła trygonometrycznego. Zapiszmy więc wzór postaci $h = a \cos k(t - p) + q$ i spróbujmy znaleźć parametry a , k , p i q . Środek koła znajduje się 18 jednostek (za jednostkę przyjmujemy centymetr) nad poziomem zerowym (czyli poziomem wody), a więc $q = 18$. Amplituda a jest równa promieniowi koła, więc wynosi 21.

Ponieważ koło wykonuje jeden obrót na 10 sekund (przyjmujemy sekundę za jednostkę czasu), okres wynosi $T = 10$ sekund. Stąd i z zależności $T = \frac{2\pi}{k}$ możemy obliczyć współczynnik k . Wynosi on $\frac{\pi}{5}$. Jeśli uczniowie nie znają tej zależności, mogą zastanowić się, jak przeskalować funkcję o okresie 2π , aby otrzymana funkcja miała okres 10.

Wreszcie p można odczytać z treści zadania „Po dwóch sekundach od rozpoczęcia obserwacji punkt P znalazł się w najwyższym położeniu”. Funkcja osiąga maksimum dla argumentu 2, a więc wykres funkcji $\cos(kx)$ należy przesunąć o 2 jednostki w prawo. Wobec tego $p = 2$.

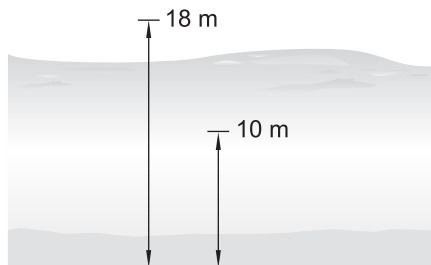
Znamy już wszystkie współczynniki, możemy więc zapisać wzór funkcji:

$$h = 21 \cos\left(\frac{\pi}{5}(t - 2)\right) + 18.$$

Korzystając z tego wzoru, można naszkicować wykres funkcji i sprawdzić, czy rozwiązanie zgadza się z danymi zadania.

Ćwiczenie 3.

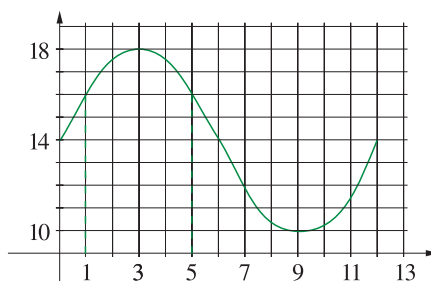
Głębokość oceanu zmienia się w czasie. Załóżmy, że głębokość ta w pewnym miejscu waha się w zakresie od 10 m do 18 m z okresem wynoszącym około 12 godzin i może być wyrażona za pomocą funkcji sinus. Przez jaką część doby głębokość wody w tym miejscu jest większa niż 16 m?



Początek rozwiązania jest podobny, jak w wypadku poprzedniego zadania. Gdy uczniowie ustalą już wzór:

$$d = 4 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 14,$$

mogą wykonać wykres i odczytać z niego rozwiązanie zadania.



Okaże się, że poziom wody wyższy niż 16 m jest przez $\frac{1}{3}$ doby. ■

Konkurs na anegdotę

Zachęcamy Państwa do przysyłania anegdot z życia szkolnego, zwłaszcza takich, które mogą stać się tematem nowych przygód Zdzisława – bohatera komiksu – lub felietonów *Matematyka*. Prosimy o nadsyłanie ich pod adresem redakcji do końca sierpnia.

Na autorów najzabawniejszych z nich czekają nagrody: **dwa kalkulatory** oraz książki.

Dla tych z Państwa, którzy przyślą anegdoty konkursowe do końca kwietnia, mamy dodatkowe nagrody za szybką odpowiedź!

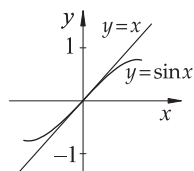
Sprostowanie

W poprzednim numerze pisma, w artykule pani Zofii Dam pt. *Odkrywamy granicę $\frac{\sin x}{x}$* , zamieściliśmy nieprawidłowo wykonany wykres funkcji.

Autorkę artykułu i wszystkich Państwa bardzo przepraszamy.

Redakcja

Prawidłowo narysowany wykres powinien wyglądać tak:



Matematyka w Szkole

Czasopismo dla nauczycieli szkół średnich

Adres redakcji:
Gdańsk, ul. Trzy Lipy 3,
tel./fax (0-58) 302-59-16 w. 180

Dział handlowy:
tel. (0-801) 64-39-17

Adres do korespondencji:
Matematyka w Szkole
Czasopismo dla nauczycieli
szkół średnich
skr. poczt. 59
80-876 Gdańsk 52

e-mail: gazetamws@gwo.com.pl
<http://www.gwo.com.pl>

Redaktor naczelny:
Marcin Braun

Wydawca:
Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe,
Gdańsk, ul. Trzy Lipy 3

Redaguje kolegium:
Marcin Braun
Aleksandra Golecka
Marcin Karpiński
Joanna Kniter
Jacek Lech
Elżbieta Stawiarz
Michał Stukow

Projekt graficzny, okładka, ilustracje:
Sławomir Kilian

Skład:
Maria Chojnicka

Zdjęcie na okładce:
Leszek Jakubowski

Druk i oprawa:
Stella Maris

Nakład:
2500 egz.

Sprostajmy wyzwaniom współczesnego świata



CASIO

Kalkulatory szkolne CASIO

ZIBI Sp. z o.o.

zadzwoń: infolinia 0801 120 110

ul. Grochowska 21a

04-186 Warszawa

tel. (0 22) 610 05 51

fax (0 22) 610 56 04

