

# Matematyka

CZASOPISMO DLA NAUCZYCIELI SZKÓŁ ŚREDNICH

## w Szkole

nr 17

ISSN 1642-3550

cena 6,40 zł

marzec-kwiecień 2005

Z potęgami  
wśród zwierząt

Matura

Jak uczyć  
logiki?

Podaż, popyt  
i matematyka



# SPIS TREŚCI

## TEMAT NUMERU – MATURA

|                                                                              |    |
|------------------------------------------------------------------------------|----|
| <i>Marcin Karpiński</i> : Kalkulator prosty, tablice i czarny długopis ..... | 2  |
| Po próbie .....                                                              | 4  |
| <i>Roman Bukurski</i> : Próba w Warszawie .....                              | 7  |
| <i>Zuzanna Mikołajska</i> : Dlaczego tak słabo? .....                        | 10 |
| <i>Anna Michalska</i> : Zadania z instrukcją .....                           | 12 |

## NAUCZANIE MATEMATYKI

|                                                                |    |
|----------------------------------------------------------------|----|
| <i>Jacek Lech</i> : Beczka Keplera .....                       | 14 |
| <i>Paweł Soboń</i> : Wieńce .....                              | 16 |
| <i>Karolina Wardańska</i> : Podaż, popyt i matematyka .....    | 18 |
| <i>Marcin Braun</i> : Z potęgami wśród zwierząt .....          | 22 |
| <i>Daniel R. Kucharczyk</i> : Jak to zapamiętać? .....         | 24 |
| <i>Mirosława Okoń</i> : Przekształcanie wykresów funkcji ..... | 25 |
| <i>Zbigniew Marciniak</i> : Jak uczyć logiki? .....            | 28 |
| List od Czytelniczki .....                                     | 32 |
| <i>Marcin Braun</i> : Ziarenka .....                           | 33 |
| Książki nadesłane .....                                        | 34 |
| <i>Janusz Karkut</i> : Dzielenie wielomianów .....             | 35 |
| <i>Dorota Nowak</i> : Jak uczyłam, nie ucząc? .....            | 36 |
| <i>Agnieszka Piecewska-Łoś</i> : Pochwała zegarmistrza .....   | 38 |
| Mam pomysł .....                                               | 40 |

## MATERIAŁY

|                              |    |
|------------------------------|----|
| Zadania przygotowawcze ..... | 40 |
|------------------------------|----|

## Z OSTATNIEJ ŁAWKI

|                                                    |    |
|----------------------------------------------------|----|
| Nic konkretnego, czyli obowiązki nauczyciela ..... | 46 |
|----------------------------------------------------|----|

# Próba w Warszawie

*Omówienie błędów popełnianych na maturze próbnej w Warszawie przez uczniów pewnej klasy.*

Chciałbym podzielić się z Państwem kilkoma uwagami, które nasunęły mi się po maturze próbnej. Myślę, że warto wyciągnąć wnioski i zwracać większą uwagę na niektóre rzeczy w pierwszych i drugich klasach. Niestety, wnioski dotyczą postępowania uwzględniającego powodzenie na maturze, co nie zawsze prowadzi do ogólnego rozwoju matematycznego naszych uczniów.

## Zadanie 1. (4 pkt)

Janek ma w tym semestrze następujące oceny z języka polskiego:

5, 5, 3, 4, 3, 3, 4.

a) Oblicz średnią ocen Janka z języka polskiego. Wynik podaj z dokładnością do 0,01.

b) Oblicz wariancję i odchylenie standardowe. Wyniki podaj z dokładnością do 0,01.

Powyższe zadanie na ogół było rozwiązywane dobrze. Najczęstszy błąd to złe zaokrąglenia, a najbardziej nieoczekiwany – pomyłki w zapisie wzoru, mimo dostępu do tablic. Taki „drobiazg” jak zaokrąglenie umyka niektórym uczniom. Chyba warto wracać do tego tematu przy okazji rozwiązywania zadań z różnych działów, przypominając uczniom, że za taką „drobną” pomyłkę też traci się punkty. Efekty powinno przynieść też przypominanie co jakiś czas o błędach zaokrągleń. Uczniów mających tendencje do pomyłek we wzorach (np. w wyniku dysleksji) warto zmobilizować do opracowania i przećwiczenia własnej strategii postępowania, np. do wyróżniania wzorów czy do wyrobienia nawyku

sprawdzania ich za każdym razem ze wzorami w tablicach itp.

## Zadanie 2. (4 pkt)

Pożyczkę w wysokości 8 700 zł zaciągniętą w banku należy spłacić w 12 ratach, z których każda następna jest mniejsza od poprzedniej o 50 zł. Oblicz wysokość pierwszej i ostatniej raty.

W tym zadaniu pojawiły się dwa rodzaje rozwiązań – z wykorzystaniem własności ciągu (czyli tak, jak założyli autorzy) oraz różne rozwiązania tego problemu „na piechotę”, np. za pomocą równania  $x + x - 50 + \dots + x - \dots = 8700$  lub wyliczenia średniej spłaty i odpowiedniego jej modyfikowania. Najczęstsze błędy to brak konsekwencji w stosowanych oznaczeniach, np. oznaczenia pierwszej raty jako  $x - 50$  w równaniu, a podawanie w odpowiedzi wartości  $x$ . W rozwiązaniach tego zadania bardzo zaskoczyła mnie duża liczba błędnych odpowiedzi, mimo że sprawdzenie poprawności rozwiązania było banalne. Nie liczę na to, że maturzyści będą sprawdzać każde zadanie (na maturze przede wszystkim nie będą mieć na to czasu), ale warto wyrobić dwa nawyki:

1) Na koniec czytamy treść zadania jeszcze raz (możemy np. wychwycić ominiętą część zadania, popełniony błąd itd., np. w zadaniu 1. być może zwrócilibyśmy większą uwagę na zaokrąglenia).

2) Odpowiadamy sobie na pytanie „Czy warto sprawdzać?” Myślę, że warto, jeśli np.

— sprawdzenie jest bardzo proste (jak w przytoczonym powyżej zadaniu)

— rozumieliśmy zadanie, ale rozwiązaliśmy je dosyć chaotycznie

Oczywiście, sprawdzenie zajmuje trochę cennego czasu. Uczeń sam musi zdecydować, na co go poświęci. To zadanie było świetnym przykładem na to, że minuta poświęcona na wykonanie sprawdzenia plus ok. dwie minuty na poprawę rozwiązania mogły przynieść zwiększenie wyniku nawet o 3 punkty.

### Zadanie 3. (5 pkt)

Funkcja  $f$  jest określona wzorem:

$$f(x) = ax^2 + bx + 1 \text{ dla } x \in \mathbb{R}.$$

a) Wyznacz wzór tej funkcji tak, aby  $f(1) = 2$  i  $f(2) = -1$ .

b) Dla wyznaczonych wartości współczynników  $a$  i  $b$  rozwiąż nierówność:  $f(x) > 1$ .

W rozwiązaniach tego zadania nie było charakterystycznych błędów.

### Zadanie 4. (4 pkt)

Aby wyznaczyć równanie symetralnej odcinka o końcach  $A(-1; 4)$ ,  $B(3; -2)$ , postępujemy w następujący sposób:

— wybieramy dowolny punkt  $P(x; y)$  należący do symetralnej odcinka  $AB$  i korzystamy z własności symetralnej odcinka:  $|AP| = |BP| \iff |AP|^2 = |BP|^2$

— ponieważ  $|AP|^2 = (x + 1)^2 + (y - 4)^2$  oraz  $|BP|^2 = (x - 3)^2 + (y + 2)^2$ , więc  $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = (x - 3)^2 + (y + 2)^2$

— przekształcamy otrzymane równanie do prostszej postaci i otrzymujemy równanie:  $2x - 3y + 1 = 0$ , które jest równaniem symetralnej odcinka  $AB$ .

Postępując w analogiczny sposób, wyznacz równanie symetralnej odcinka o końcach:  $C(4; 6)$ ,  $D(6; -2)$ .

Ze schematu oceniania dołączonego do tego zadania wynika, że w zadaniach z instrukcją uczeń powinien niestety wiernie kopiować rozwiązanie modelowe. Niektóre punkty były przyznawane nie za samodzielne przekształcenia, ale

za komentarz – najbezpieczniej go po prostu przepisać.

### Zadanie 5. (4 pkt)

Wielkość prostokątnego ekranu telewizora określa długość jego przekątnej wyrażona w calach. Oblicz, o ile procent zwiększymy powierzchnię ekranu, jeśli długość przekątnej wynoszącą 21 cali powiększymy do 32 cali, zachowując stosunek długości boków prostokąta. Wynik podaj z dokładnością do 0,1 %.

Nikt tego zadania nie rozwiązał poprawnie. Najczęściej uczniowie nie potrafili określić stosunku pól na podstawie stosunku długości. Najbardziej nieoczekiwane było osiągnięcie prawidłowego wyniku przez przeliczenie całej sytuacji przy założeniu, że ekran jest kwadratowy – niestety bez podania komentarza.

### Zadanie 6. (4 pkt)

Ciąg określony jest wzorem:

$$a_n = n^3 - 10n^2 + 31n - 30.$$

Wiedząc, że  $a_2 = 0$ , wyznacz wszystkie pozostałe wyrazy tego ciągu równe zero.

Uczniowie myśleli, że jest to zadanie z działu *Ciągi* i próbowali (niestety bez skutku) znaleźć odpowiedni algorytm dotyczący ciągów. Najczęściej porzucali to zadanie po zapisaniu

$$n^3 - 10n^2 + 31n - 30 = 0,$$

nie zauważając, że to wielomian. Aby zapobiec tego typu sytuacjom, trzeba przez całe liceum dawać uczniom do rozwiązania zadania zawierające podstawowe wiadomości z innego działu, a w wielomianach zmienić czasem niewiadomą.

**Zadanie 7. (3 pkt)** Dana jest funkcja określona za pomocą zbioru par uporządkowanych:

$$\{(x, x^2 + 1) : x \in \mathbb{N}_+ \text{ i } x \leq 7\}$$

a) Sporządź wykres tej funkcji i określ jej zbiór wartości.

b) Wyznacz wszystkie argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartość 37.

To zadanie bardzo wielu uczniów po prostu opuściło, a część z nich połączyła punkty linią i podała dwa rozwiązania do punktu b). Niektórych uczniów przestraszyła forma zadania, gdyż raczej rzadko korzystali z podobnego zapisu. Warto przygotować dla maturzystów serię banalnych zadań zapisanych bardzo formalnie, aby przekonali się, że coś, co na pierwszy rzut oka jest niezrozumiałe, może okazać się bardzo proste. Drugi błąd polegał na tym, że uczniowie działali schematycznie. Pomóc może czytanie jeszcze raz (ze zrozumieniem!) treści zadania po skończeniu rozwiązania (patrz wnioski do zadania 2.).

### Zadanie 8. (4 pkt)

Metalową kulę o promieniu długości 10 cm oraz stożek, w którym średnica i wysokość mają długości odpowiednio 16 cm i 12 cm, przetopiono. Następnie z otrzymanego metalu wykonano walec o średnicy  $\frac{8\sqrt{3}}{3}$  cm. Oblicz wysokość tego walca.

Często pojawiały się błędy rachunkowe, pomyłki we wzorach, wstawianie złych wielkości. Mimo że większość uczniów potrafiła znaleźć właściwą metodę rozwiązania tego zadania, to łączna punktacja wypadła bardzo słabo. Każdy z wymienionych wyżej błędów kosztował utratę punktu. Rekordzista stracił w ten sposób wszystkie punkty. Co gorsza – zadanie to było czasochłonne. Uczeń, który wie, że robi liczne błędy, powinien zostawiać takie zadania na koniec i rozwiązywać je, jeśli wystarczy mu czasu.

### Zadanie 9. (5 pkt)

Opisz za pomocą układu nierówności zbiór wszystkich punktów należących do trójkąta  $ABC$  przedstawionego na rysunku. Oblicz pole tego trójkąta.

Najczęstszy błąd to podawanie równań zamiast nierówności. Warto po rozwiązaniu czytać zadanie jeszcze raz (patrz

zadanie 2.). Dla niektórych uczniów wyznaczenie równań prostych było na tyle trudne, że zapominali, jakie właściwie było polecenie zadania. Po prostu spoczywali na laurach. Uff, zrobiłem już to, co trudne. Przejdę do następnego zadania... Ale ten sposób postępowania dużo kosztuje... (oczywiście punktów).

### Zadanie 10. (6 pkt)

W pudełku znajdują się żetony. Wśród nich jest 6 żetonów o nominale 5 zł oraz  $n$  żetonów o nominale 10 zł. Losujemy z pudełka dwa żetony. Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na wylosowaniu obu żetonów o nominale 10 zł jest równe  $\frac{1}{2}$ . Oblicz  $n$ .

Moi uczniowie nie poradzili sobie z tym zadaniem. Po maturze próbnej wszyscy stwierdzili, że w tym zadaniu „najgorsze było  $n$ ”. Większość umiała rozwiązać podobne zadanie, gdy zamiast  $n$  wstawili konkretną liczbę. Potem już bez problemu obliczali prawdopodobieństwo przy użyciu  $n$ . Warto pokazać uczniom taki schemat postępowania, ale nie bardzo wierzę, że zastosują go samodzielnie na maturze...

### Zadanie 11. (7 pkt)

Wyznacz miarę kąta między ścianą boczną a płaszczyzną podstawy ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego, wiedząc, że pole jego podstawy jest równe  $6\sqrt{3}$ , a pole powierzchni bocznej ostrosłupa jest równe 12. Sporządź rysunek ostrosłupa i zaznacz na nim szukany kąt.

Najczęściej popełnianym błędem było złe zaznaczenie kąta, co wynikało z tego, że nie omawiałem jeszcze z uczniami stereometrii. W wypadku zadań z tego działu warto zwracać uczniom szczególną uwagę na rysunki, gdyż są ważniejsze od dalszych rachunków (jeśli rysunek jest zły, dalsza część zadania nie ma sensu). Jeśli uczeń ma trudności ze stereometrią, powinien ćwiczyć przede wszystkim wykonywanie rysunków. ■

# Z potęgami wśród zwierząt

*Do czego przydają się funkcje typu  $y = bx^a$ ?*

Dlaczego wielu niezłych gimnazjalistów traci matematyczny wątek w liceum? Czyżby nagle głupieli? Owszem, głupieją (biologia wieku dojrzewania robi swoje), ale przede wszystkim głupieje w ich mniemaniu matematyka. Nagle bowiem pojawiają się niezwykle dziwaczne pojęcia. Jednym z nich jest potęga o wykładniku niecałkowitym. Warto, aby obliczanie takich potęg nie było sztuką dla sztuki, ale wiązało się z jakąś fizyczną rzeczywistością.



Pisano już wiele na tych łamach o funkcji wykładniczej. Stosujemy ją do opisu wzrostu lub zaniku pewnych wielkości. Korzystając z mody na horrory, odwołujemy się do takich zjawisk jak wybuch bomby atomowej, promieniotwórczość czy stygnięcie zwłok. W wykładniku pojawia się czas, a czas może przyjmować dowolne wielkości ułamkowe czy nawet niewymierne.

A czy funkcje potęgowe (z ułamkowymi wykładnikami) także mogą mieć jakieś praktyczne zastosowanie? Okazuje się, że mogą, i to nie w jakiejś bardzo abs-

trakcyjnej fizyce lub chemii, ale w biologii zwierząt widocznych gołym okiem. Warto jednak dopuścić nieco szerszą klasę funkcji:  $y = bx^a$ , a nie tylko  $y = x^a$ .

## Powierzchnia i masa

Wśród figur podobnych pole powierzchni rośnie jak kwadrat wymiarów liniowych, a objętość – jak sześćcian. Wobec tego:

$$\begin{aligned} \text{powierzchnia} &\sim (\text{długość})^2 \sim \\ &\sim (\text{objętość}^{1/3})^2 = (\text{objętość})^{2/3} \end{aligned}$$

Tak więc zależność pola powierzchni od objętości możemy opisać funkcją:

$$S = bV^{2/3}$$

Gdy mowa o ciałach fizycznych, a nie bryłach geometrycznych, możemy posługiwać się pojęciem masy. Masa jest proporcjonalna do objętości (interesują nas tutaj ciała zbudowane z tego samego materiału, a więc o jednakowej gęstości). Funkcja ma więc podobną postać, inny jest tylko współczynnik  $b$  (i jego jednostka):

$$S = bm^{2/3}$$

Okazuje się, że taki wzór bardzo się przydaje przy wyznaczaniu pola powierzchni... skóry zwierząt. Po co komu to pole? Otóż dla biologów jest ono niezwykle użyteczną wielkością. Zwierzęta stałocieplne (tak jak i ludzie) tracą ciepło przez skórę. Niezależnie od tego, czy za utratę energii odpowiada parowanie potu, promieniowanie cieplne czy bezpośrednia wymiana ciepła z powietrzem, wszystko odbywa się przez skórę, a więc proporcjonalnie do jej pola powierzchni.

Łatwo się domyślić, że pomiar powierzchni zwierzęcia jest dość trudny. Znacznie łatwiej zważyć je i skorzystać z gotowego wzoru. Skąd jednak wziął się ten wzór? Wykładnik  $2/3$  właśnie uzasadniliśmy teoretycznie. Współczynnik  $b$  jest różny dla różnych gatunków zwierząt i trzeba go wyznaczać doświadczalnie. Musimy zmierzyć bezpośrednio powierzchnię pewnej grupy osobników, rozciągając skórę na papierze milimetrowym (po śmierci), oklejając zwierzę takim papierem (co można zrobić za życia) lub malując je farbą za pomocą wałka wyposażonego w licznik obrotów (tak mierzono powierzchnię krów). Po porównaniu z masą można obliczyć średnią wartość współczynnika. A teraz ćwiczenia – dla Państwa, a potem może dla Państwa uczniów:

*Dla trzech gatunków ssaków: nietoperza, wieloryba i lwa współczynniki  $b$  wynoszą (nie w tej kolejności!): 8, 12 i 57. Dopasuj zwierzęta do współczynników.*

*Oblicz współczynnik  $b$  dla napełnionych wodą kuli i walca o proporcji wysokości do promienia 4 : 1. Porównaj z wielkościami dla zwierząt.*

## Zupełnie dziwaczne wykładniki

Jeśli chcemy obliczyć powierzchnię ciała nieco dokładniej, możemy skorzystać ze wzoru uwzględniającego obok masy także wysokość:

$$S = 0,007184m^{0,425}h^{0,725}$$

( $S$  – powierzchnia w  $m^2$ ,  $m$  – masa w kg,  $h$  – wysokość w cm)

Wchodzimy tu już w dziedzinę bardzo dziwacznych wykładników, za którymi nie stoi teoretyczne wyprowadzenie, ale opracowanie danych doświadczalnych. Oto dalsze przykłady (wszystkie masy podane są w kilogramach, jeśli nie jest zaznaczone inaczej):

- Masę  $m_m$  mózgu ssaka (poza naczelnymi) można obliczyć na podstawie jego masy  $m$  ze wzoru:

$$m_m = 0,01m^{0,7}.$$

- Pojemność płuc ssaków (w litrach) można obliczyć ze wzoru:

$$V = 0,17m^{0,8}.$$

- Grubość  $L$  skorupki jaja (w mm) zależy od masy tego jaja (w gramach):

$$L = 0,051m^{0,456}.$$

## Czy to się przyda w szkole?

O tych zastosowaniach można wspomnieć na lekcji. Można też wykorzystać je do układania zadań z treścią. Najprostsze mogą polegać na obliczeniu czegoś ze wzoru czy – jeszcze lepiej – oszacowaniu. Oto przykład z *Matematyki z plussem*:

*Pojemność płuc ssaków wyrażoną w centymetrach sześciennych można oszacować, obliczając wartość wyrażenia  $170m^{4/5}$ , gdzie  $m$  oznacza masę ciała ssaka w kilogramach. Oszacuj pojemność płuc słonia i świnki morskiej.*

Wzór z tego zadania uczniowie mogą później przekształcać, tak aby wyznaczyć z niego  $m$ . Nie jest to trudne. Będzie nieco trudniejsze, jeśli wykładnik podamy w postaci ułamka dziesiętnego. Kilka ćwiczeń podałem już wcześniej. W sumie pole do popisu mamy duże, pomysłów nie zabraknie – raczej czasu na ich realizację.

## Skąd to wiemy?

Powiedzieliśmy, że za wykładnikami typu 0,77 czy 0,456 nie stoi teoretyczne wyprowadzenie, lecz analiza danych doświadczalnych. W jaki sposób analizuje się takie dane – o tym w następnym numerze. ■

# Konkurs

W numerze piętnastym „Matematyki w Szkole” pytaliśmy, ile kosztuje pistolet. Pytanie nie sprawiło Państwu problemu. Prawidłową odpowiedź można było znaleźć w artykule pani Anny Kubisztal pt. *Bezcenne pomoce*, a brzmiała ona: „ceny wahają się od 20 zł do 120 zł”. Nagrody – książki Johna Allena Paulosa pt. *Analfabetyzm matematyczny i jego skutki* oraz naklejki dla uczniów „Zachętki i motywce” – otrzymują panie Beata Mazurek z Piasków i Danuta Margasińska z Przysuchej.

Nowym zadaniem dla Państwa będzie rozwiązanie zagadki logicznej o ministrach, znajdującej się na stronie 31. w artykule pana Zbigniewa Marciniaka. Życzymy twórczego logicznego myślenia.

## Nasza okładka

Zdjęcie na okładce przedstawia wielbłąda z zoo w Gdańsku–Oliwie.

## Matematyka w Szkole

Czasopismo dla nauczycieli szkół średnich

### Adres redakcji:

80-309 Gdańsk  
al. Grunwaldzka 413,  
tel. (58) 340-63-80  
fax (58) 340-63-01

### Dział sprzedaży:

tel. (58) 340-63-60

### Adres do korespondencji:

Matematyka w Szkole  
Czasopismo dla nauczycieli  
szkół średnich  
skr. poczt. 59  
80-876 Gdańsk 52  
e-mail: gazetamws@gwo.pl  
<http://www.gwo.pl/gazeta2>

### Wydawca:

Gdańskie Wydawnictwo  
Oświatowe, Sp. z o.o.  
80-309 Gdańsk, al. Grunwaldzka 413  
KRS 0000125773  
przy Sądzie Rejonowym w Gdańsku

### Redaktor naczelny:

Marcin Karpiński

### Redaguje kolegium:

Marcin Braun  
Agnieszka Ciesielska  
Aleksandra Golecka-Mazur  
Marcin Karpiński  
Joanna Kniter  
Jacek Lech  
Małgorzata Pałys  
Michał Stukow  
Agnieszka Szulc

### Projekt graficzny, okładka, ilustracje:

Sławomir Kilian

### Skład:

Maria Chojnicka  
Aleksandra Golecka-Mazur  
Łukasz Sitko

### Zdjęcie na okładce:

Piotr Dziki

### Druk i oprawa:

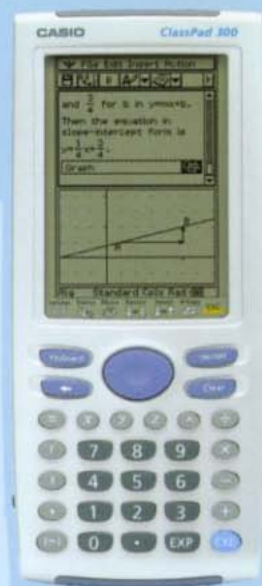
Normex

### Nakład:

2200 egz.

# Kalkulatory szkolne CASIO

Nowy wygląd, dodatkowe możliwości!



ZIBI Sp. z o. o.

ul. Grochowska 21 A

tel. (0 22) 32-89-111, fax: (0-22) 32-89-112

**Szkolenia dla nauczycieli**

Zadzwoń: 0 801 120 110

lub zajrzyj na stronę: [www.kalkulatory.pl](http://www.kalkulatory.pl)

[www.zibi.pl](http://www.zibi.pl)

e-mail: [zibi@zibi.pl](mailto:zibi@zibi.pl)