MATEMATYKA W SZKOLE

nr **35** listopad/grudzień/2008

Czasopismo dla nauczycieli szkół średnich

cena 7 zł ISSN 1642-3550

- Listy z Antwerpii
- Prawdopodobieństwo bez Omegi
- I bądź tu mądry

Omega

Całkiem niedawno bardzo popularna była książka kurs przygotowawczy do matury, w której zadania z rachunku prawdopodobieństwa były podzielone na zadania z monetami, zadania z kostkami i zadania inne. Przez wiele lat rachunek prawdopodobieństwa był w szkole dziedziną magiczną. Pamiętam przerażenie mojej nauczycielki na lekcjach rachunku. Ani ona, ani my nic z tego nie rozumieliśmy, ale rozwiązywanie zadań szło nam całkiem nieźle. Cała sztuka polegała przecież na dopasowaniu odpowiedniego wzoru kombinatorycznego do treści zadania. A ponieważ wzorów nie było aż tak dużo, jakoś dawaliśmy sobie radę. Po latach sam byłem nauczycielem i rachunek prawdopodobieństwa nie był już dla mnie zbiorem dziwacznych algorytmów. Ale moi uczniowie też mieli problem z tym tematem, tylko już zupełnie inny. Jak na maturze opisać rozwiązanie zadania z prawdopodobieństwa (a wtedy właściwy opis był ważniejszy od rozwiązania), skoro zadanie jest banalne i można je rozwiązać w pamięci? Zwykle opis rozpoczynał się od rytualnego zapisu $\Omega = \ldots$ Bez omegi nie było rozwiązania. Z artykułu Michała Szurka (s. 17–20) dowiedzą się Państwo, że jednak można inaczej, że i tutaj powinniśmy docenić umiejętność rozumowania.

Znam nauczycieli, którzy twierdzą, że teraz nie będzie się już uczyć umiejętności rozumowania, ponieważ usunięto z podstawy programowej logikę formalną. Aby przekonać się, że wcale tak nie jest (a przynajmniej, że nie musi tak być), wystarczy przeczytać artykuły z działu Temat numeru. W jednym z nich (s. 14–16) Tomasz Malec rozprawia się z dość rozpowszechnionym przekonaniem, że dawne podręczniki świetnie uczyły sztuki dowodzenia twierdzeń.

Na koniec polecam list z Antwerpii od Jacka Lecha. Tym razem dowiedzą się Państwo, jak wygląda dzień pracy belgijskiego nauczyciela.

Marcin Karpiński

Matematyka w Szkole

Czasopismo
dla nauczycieli
szkół średnich

Adres redakcji:
80-309 Gdańsk
al. Grunwaldzka 413
tel. 058 340-63-80
fax 058 340-63-21

Dział sprzedaży:
tel. 058 340-63-60
e-mail: prenumerata@gwo.pl

Adres do korespondencji:
Matematyka w Szkole
Czasopismo dla nauczycieli
szkół średnich
skr. poczt. 59
80-876 Gdańsk 52

e-mail: gazetamws@gwo.pl
http://www.gwo.pl/gazeta2

Wydawca:
Gdańskie Wydawnictwo
Oświatowe, Sp. z o.o.
80-309 Gdańsk, al. Grunwaldzka 413
KRS 0000125773
przy Sądzie Rejonowym w Gdańsku

Projekt graficzny:
Rafał Szczawiński / Pracownia

Ilustracje:
Sławomir Kilian

Skład:
Maria Chojnicka
Agnieszka Frączyk

Zdjęcie na okładce:
Jacek Lech

Druk i oprawa: Normex, Gdańsk
Nakład: 1200 egz.

SPIS TREŚCI

EDUKACJA

3 *Janusz Karkut* Karykaturalne przykłady zadań maturalnych?
5 *Zuzanna Mikołajska* Odpowiedź
7 *Jacek Lech* Listy z Antwerpii
10 *Zuzanna Mikołajska* Obowiązkowa matura 2010 (cd.)
13 Nauczanie w Europie. Nauczyciel na etacie

TEMAT NUMERU – LOGIKA I ZBIORY

14 *Tomasz Malec* Ach, co to były za dowody...
17 *Michał Szurek* Prawdopodobieństwo bez Omegi?
21 *Grażyna Miłosz* Logika międzynarodowo
23 *Dominika Szpic-Siwińska* W tę i we w tę
26 *Elżbieta Anna Tuska* Logika intuicyjnie
29 Mam pomysł

NAUCZANIE MATEMATYKI

30 *Agnieszka Piecewska-Łoś* Trzynaście ksiąg. Ośli most
32 *Edward Zych* Śladami Euklidesa. Wartości średnie w trapezie
34 Mam pomysł
35 *Paweł Perekietka* Sposób na algorytm
37 List od Czytelnika
38 *Adam Wojaczek* Hiperbola
41 *Marian Maciocha* Trzy okręgi w trójkącie

MATERIAŁY

42 *Anna Sajko* Zadania przygotowawcze
45 *Jerzy Janowicz* VI Bolesławiecki Konkurs Matematyczny

Z OSTATNIEJ ŁAWKI

46 I bądź tu mądry

Tomasz Malec

ACH, CO TO BYŁY ZA DOWODY...

Fakty powszechnie znane nie wymagają dowodu.

(Kodeks postępowania karnego, art. 168)

Jeśli porównamy obecne podręczniki do matematyki dla szkół średnich z tymi sprzed reformy w 2002 r., zauważymy między innymi znaczne zmniejszenie się liczby dowodów. Kto uczył przed reformą, pamięta, że w szkole odchodzenie od dowodów zaczęło się już znacznie wcześniej. Autorzy dostosowali się więc tylko do szkolnej praktyki. Warto się zastanowić nad przyczynami tego stanu rzeczy.

Po co się uczyć?

Zacznijmy od autentycznej historii związanej z nauczaniem . . . religii. Otóż powiedział mi kiedyś pewien katecheta: „Ciągle uciekają mi z lekcji. Ale właściwie to niewielka strata, teologami i tak nie zostaną".

Pomysł, że religii uczy się przede wszystkim po to, aby przygotować uczniów do studiowania teologii, jest tak absurdalny, że nie warto tego komentować. Jednak w wypadku innych przedmiotów absurd jest niewiele mniejszy, a spotykamy się z nim, niestety, często. Ile razy słyszałem, że czegoś tam trzeba nauczyć na lekcjach fizyki w gimnazjum (!), ponieważ niektórzy uczniowie zostaną fizykami, a przecież każdy fizyk powinien to wiedzieć . . .

Także nauczanie matematyki bywa prowadzone tak, jakby jego głównym celem było przygotowanie ułamka procenta uczniów do studiowania matematyki. Owszem, z matematyką na studiach spotka się wiele osób, ale najczęściej będą się uczyły stosowania jej metod w swoich specjalnościach, np. w technice czy ekonomii. Formalna struktura matematyki nie będzie im potrzebna, a trzeba się pogodzić z faktem, że większa część społeczeństwa nie będzie się nią zajmować dla przyjemności.

Jak zaciemnić rzeczy jasne

Gdy tymczasem zajrzymy do podręczników z lat dziewięćdziesiątych ubiegłego wieku, to zobaczymy, że w pierwszej klasie autorzy skupiają się na dowodzeniu faktów powszechnie znanych.

Na przykład podręcznik Jana Anusiaka[1] na pierwszych stronach zajmuje się badaniem, kiedy przy przestawianiu składników sumy korzystamy z łączności, kiedy z przemienności, a kiedy z obu tych praw łącznie. Uczeń ma dojść do tego samodzielnie (rozwiązując ćwiczenie), potem dopiero może się przekonać, czytając dalszy tekst, czy jego odpowiedź była prawidłowa. Ma także udowodnić równość $(xy)\cdot(zu)=(xu)\cdot(yz)$, przy czym najważniejsza jest refleksja, z których praw korzysta w którym momencie[2].

Jest to więc bardzo formalne podejście do matematyki. Sam przedmiot badań – działania na liczbach naturalnych – jest dla uczniów jasny i znany od lat. Początkujący uczeń szkoły średniej ma się jednak nauczyć, jak wyprowadzać znane twierdzenia z przyjętych aksjomatów.

Co ciekawsze, ma się tego nauczyć sam, gdyż dowody na razie spotyka tylko w ćwiczeniach i zadaniach do samodzielnego wykonania. Pierwszy dowód pojawia się dopiero po kilkunastu ćwiczeniach. Jest to uzasadnienie faktu, że $(-1)\cdot(-1)=1$.

$0 = 0\cdot(-1) =$
$= (1-1)\cdot(-1) =$
$= (1+(-1))\cdot(-1) =$
$= 1\cdot(-1)+(-1)\cdot(-1) =$
$= -1+(-1)\cdot(-1)$
skąd
$(-1)\cdot(-1)=1$
jako liczba przeciwna do -1.

Podobny (choć nieco jaśniej zredagowany) dowód tego samego faktu spotykają uczniowie w innej książce z tego samego okresu[3]. Określony jest on jako „wytłumaczenie”… Ale tutaj przynajmniej uczniowie nie musieli na własną rękę wyprowadzać znanych faktów z aksjomatów działań.

W obu książkach już na pierwszych lekcjach uczniowie spotykali się z dowodem nie wprost – uzasadniali niewymierność $\sqrt{2}$. Żeby było zabawniej, w książce J. Anusiaka twierdzenie to zostało sformułowane w klasycznej postaci geometrycznej jako niewspółmierność przekątnej kwadratu z jego bokiem.

Ale to i tak nic w stosunku do dowodu niewymierności $\sqrt{p}$ dla dowolnej liczby pierwszej p zamieszczonego w innej książce[4]. Notabene, w dowodzie tym korzystano z twierdzenia, że jeśli $p|k^2$, to $p|k$, które pojawiało się wcześniej… bez dowodu. Zatem cała ta straszna abstrakcja dawała tylko pozory ścisłości. Bardzo podobnie było w wypadku innej książki[5]. Autorki ograniczały się co prawda do dowodu niewymierności $\sqrt{2}$, ale korzystały przy tym z jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze, który sam już dowodu nie miał.

Trudno się dziwić, że uczniowie po kilku lekcjach takiego kursu matematyki tracili kontakt z przedmiotem. Na szczęście większość nauczycieli po prostu ignorowała podręcznik i uczyła po swojemu. Szkoda tylko, że po swojemu oznaczało często rozpoczynanie pierwszej klasy od formalnej logiki, kilka lat wcześniej wycofanej z programu. Zamienił stryjek...

Co zrobić z geometrią?

Kiedyś geometrii uczono sposobem aksjomatycznym. Ostatnią próbą była wspomniana książka Macieja Bryńskiego i Norberta Dróbki.

Nie znam nikogo, kto uczyłby ściśle według tej książki, ponieważ było to po prostu niemożliwe – na 51 rozdziałów przypadało 90 godzin lekcyjnych. Ale gdyby nawet czasu wystarczało, z dowodami w geometrii byłby ten sam problem, co w wypadku własności liczb i działań.

Początek aksjomatycznego wywodu zawsze polega na dowodzeniu jednych oczywistości na podstawie innych, arbitralnie wybranych. Dlaczego na przykład jedna z cech przystawania trójkątów ma być aksjomatem, a innych trzeba dowodzić? Uczeń przecież nie wie, że w wypadku tej właśnie cechy dowód Euklidesa jest nie do przyjęcia[6].

I po co skomplikowany dowód, że suma dwóch kątów trójkąta jest mniejsza od 180°, skoro uczniowie wiedzą doskonale z podstawówki, że wszystkie trzy mają razem 180°? Co więcej, ten fakt zostanie wkrótce udowodniony i będzie można z niego „legalnie" skorzystać? Dla matematyka jest ciekawe, że pierwsze z tych twierdzeń da się udowodnić bez drugiego, a co więcej, nawet bez piątego postulatu... Ale pierwszoklasista nie ma żadnych szans, aby to docenić.

A jaki powinien być pierwszy dowód z geometrii dla pierwszoklasistów według panów Cegiełki i Przyjemskiego? Otóż jest nim wyprowadzenie z ogólnej definicji odległości (tej znanej z wykładów topologii) wniosku, że odległość nigdy nie jest ujemna.

Podobno na własną prośbę

Był kiedyś wierszyk (stanowiący wówczas polityczną aluzję) o dinozaurach, które zginęły „podobno na własną prośbę". Podobnie jest, niestety, z nauczaniem matematyki. Nie dziwmy się wcale, że tak drastycznie obniża się ostatnio jej rola w szkole, skoro zamiast uczyć tego, co potrzebne ludziom, uczymy tego, co nas samych interesuje. Dowody twierdzeń są jednym z wielu przykładów.

A szkoda, bo przecież są potrzebne. Rolą matematyki jest także nauczanie ścisłego rozumowania. Tylko że zaczynać trzeba od dowodów faktów nieoczywistych, które da się w zrozumiały dla ucznia sposób uzasadnić na podstawie oczywistych. Na budowanie formalnych konstrukcji przyjdzie czas na studiach. ■

1 Jan Anusiak, *Matematyka. Podręcznik dla liceum ogólnokształcącego i technikum,* WSiP, Warszawa 1993.

2 A to zagadnienie sprawia czasem kłopoty nawet autorom podręczników – przykład opisuje Danuta Zaremba w książce *Sztuka nauczania matematyki w szkole podstawowej i gimnazjum*, GWO, Gdańsk 2004, s. 42–44.

3 Maciej Bryński, Norbert Dróbka, *Matematyka I. Podręcznik dla klasy I liceum i technikum,* WSiP, Warszawa 1996.

4 Kazimierz Cegiełka, Jerzy Przyjemski, *Matematyka. Podręcznik dla klasy I liceum oraz klasy I technikum*, WSiP, Warszawa 1998.

5 Aniela Ehrenfeucht, Olga Stande, *Algebra dla klasy I liceum ogólnokształcącego, liceum zawodowego i technikum*, WSiP, Warszawa 1988.

6 Zob. Agnieszka Piecewska-Łoś, *Trzynaście ksiąg. Mit o ścisłości*, „Matematyka w Szkole", nr 34, wrzesień–październik 2008, s. 31–33. Nb. ten niby-dowód pojawia się u J. Anusiaka, tyle że nazwany „uzasadnienie". Czy autor liczył, że uczniowie dostrzegą subtelną różnicę między „uzasadnieniem" jednej cechy przystawania a „dowodem" innej? Nie, raczej myślał o tym, żeby książka nie budziła zastrzeżeń dorosłych matematyków.

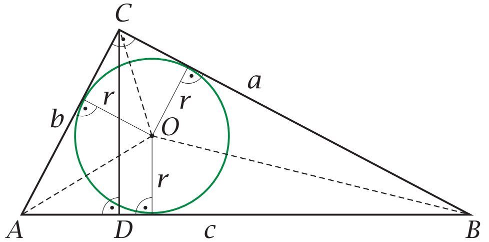
Marian Maciocha

TRZY OKRĘGI W TRÓJKĄCIE

W zakresie podstawowym uczniowie rzadko spotykają zadania na dowodzenie. Jednak warto podsuwać im takie przykłady, choćby dlatego, że pojawiły się w informatorze Centralnej Komisji Egzaminacyjnej dotyczącym obowiązkowej matury w 2010 roku. Oto przykład takiego zadania na dowodzenie[1]:

W trójkącie prostokątnym ABC o kącie prostym przy wierzchołku C poprowadzono wysokość CD. Udowodnij, że $r_1 + r_2 + r = h$, gdzie r_1 jest promieniem okręgu wpisanego w trójkąt ADC, r_2 – promieniem okręgu wpisanego w trójkąt DBC, r – promieniem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, zaś $h = |CD|$.

Chciałbym zaproponować inne rozwiązanie tego zadania niż to, które podano w zbiorze zadań, z którego pochodzi (wykorzystam podobieństwo trójkątów).



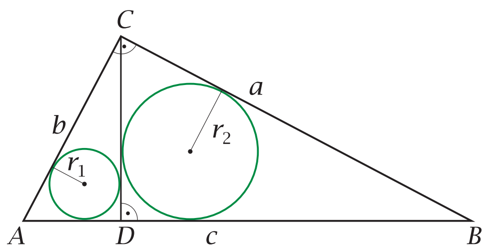
Pole trójkąta ABC jest równe sumie pól trójkątów AOB, BOC i COA. Możemy zatem zapisać:

$$\frac{1}{2}ch = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr$$

Stąd

$$a + b + c = \frac{ch}{r}$$

W trójkąt ABC wpiszemy teraz dwa mniejsze okręgi:



Zauważmy, że podobne są trójkąty prostokątne ACD i ABC ($|\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle ACB|$ i $|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle BAC|$) oraz trójkąty CBD i ABC ($|\sphericalangle BDC| = |\sphericalangle BCA|$ i $|\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle ABC|$). Zatem

$$r_1 = \frac{b}{c}r \quad \text{i} \quad r_2 = \frac{a}{c}r,$$

stąd:

$$r_1 + r_2 + r = \frac{b}{c}r + \frac{a}{c}r + r = \frac{r}{c}(a+b+c) = \frac{r}{c}\frac{ch}{r} = h$$

■

[1] Zbigniew Bobiński, Piotr Nędzyński, Mirosław Uscki, *Liga zadaniowa. XX lat. Zadania wybrane*, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń 2007, s. 24.