WYKŁAD 3

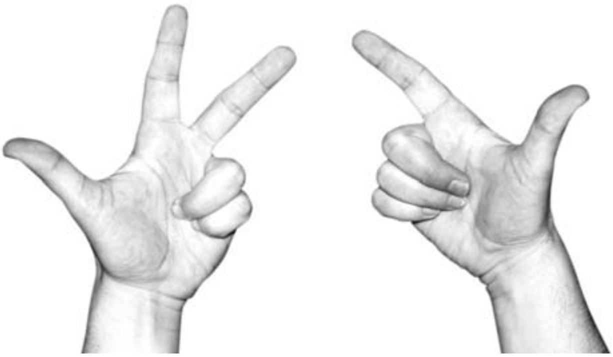
Mnożenie i dzielenie

Ćwiczenie 3.8. Oblicz w ten sposób 1234^2, 111111^2, 100000^2.

Z interesujących trików, które kiedyś mogły ułatwiać uczniom mnożenie, omówimy mnożenie na palcach. Prawdę mówiąc, trudno sobie wyobrazić, że kiedykolwiek było to rzeczywiste ułatwienie. Rzecz zasługuje jednak na uwagę i może służyć jako bardzo ciekawe ubarwienie lekcji.

Pierwsza z reguł ma zastosowanie do liczb jednocyfrowych większych niż 5. Zakładamy, że mnożenie aż do pięć razy pięć mamy opanowane. Jeśli chcemy obliczyć, ile jest siedem razy osiem, to u każdej ręki wystawiamy tyle palców, o ile dana liczba jest większa od 5. Pozostałe palce zginamy. Następnie dodajemy palce wystawione (to będzie cyfra dziesiątek iloczynu). Puryści zaprotestują przeciwko „dodawaniu palców" i każą być może mówić, że dodajemy *liczby* palców wystawionych. Nie zwracając na nich uwagi, mnożymy palce zgięte (i jest to cyfra jedności iloczynu). Na przykład, dla obliczenia, ile jest siedem razy osiem, wystawiamy w lewej ręce trzy palce (dwa zostają zagięte), w prawej dwa (trzy zgięte). Odczytujemy cyfrę dziesiątek: dwa *plus* trzy i cyfrę jedności: dwa *razy* trzy. Wynik mnożenia: 56.

Reguła ta wynika z tożsamości: $ab = 10\,((a-5)+(b-5)) + (10-a)(10-b)$.



Inna reguła obowiązuje, gdy mnożymy liczby z przedziału od 11 do 15. Omówimy ją na przykładzie mnożenia 13 razy 14. U każdej ręki wystawiamy „nadwyżkę" ponad 10, a zatem 3 i 4. Następnie dodajemy wystawione palce $(3+4=7)$ i to jest liczba dziesiątek wyniku. Mnożymy te same liczby: 3 razy $4 = 12$ i to są jedności wyniku. 12 jedności to 10 i 2. Dopisujemy stały składnik 100. Wynikiem jest $100 + 70 + 12 = 182$.

Dla liczb z przedziału od 15 do 19 postępujemy nieco podobnie jak dla liczb jednocyfrowych. Chcąc pomnożyć 17 przez 19, u każdej ręki wystawiamy tyle palców, o ile czynnik dany jest większy od 15: dwa u lewej ręki, cztery u prawej. Dodajemy wystawione palce i mnożymy je zawsze przez 20: $(2+4)\cdot 20 = 120$. Dodajemy iloczyn zagiętych palców i stały składnik 200, otrzymując wynik 323.

Chcąc pomnożyć 8 przez 12 „na palcach”, wprowadzamy „ujemne palce”: wystawiamy w każdej ręce tyle palców, o ile dana liczba jest większa od 5. Na jednej z rąk to łatwo: wystawiamy trzy palce. Gorzej jest z drugą. Mamy pięć palców. Ile palców zostanie, gdy wystawimy siedem? „Oczywiście” minus 2. Dodajemy teraz palce wystawione. Jest ich $3+7$, a więc 10. Palców zagiętych jest… minus 4. Dziesięć dziesiątek dodać minus cztery daje… 96. Działanie było z pozoru bezsensowne, ale dało dobry wynik. Takie niepokoje miał Törless (por. przypis w wykładzie *Matematyka z oddali*).

Proste jest piękne

Spójrzmy na najzwyklejszą tabliczkę mnożenia.

Ćwiczenie 3.9. Utwórz tę tabliczkę za pomocą arkusza kalkulacyjnego.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	46	48	50
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60	63	66	69	72	75
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80	84	88	92	96	100
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	105	110	115	120	125
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102	108	114	120	126	132	138	144	150
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	112	119	126	133	140	147	154	161	168	175
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120	128	136	144	152	160	168	176	184	192	200
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135	144	153	162	171	180	189	198	207	216	225
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200	210	220	230	240	250
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	143	154	165	176	187	198	209	220	231	242	253	264	275
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	156	168	180	192	204	216	228	240	252	264	276	288	300
13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	169	182	195	208	221	234	247	260	273	286	299	312	325
14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	154	168	182	196	210	224	238	252	266	280	294	308	322	336	350
15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180	195	210	225	240	256	270	285	300	315	330	345	360	375
16	32	48	64	80	96	112	128	144	160	176	192	208	224	240	256	272	288	304	320	336	352	368	384	400
17	34	51	68	85	102	119	136	153	170	187	204	221	238	255	272	289	306	323	340	357	374	391	408	425
18	36	54	72	90	108	126	144	162	180	198	216	234	252	270	288	306	324	342	360	378	396	414	432	450
19	38	57	76	95	114	133	152	171	190	209	228	247	266	285	304	323	342	361	380	399	418	437	456	475
20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260	280	300	320	340	360	380	400	420	440	460	480	500
21	42	63	84	105	126	147	168	189	210	231	252	273	294	315	336	357	**378**	399	420	441	462	483	504	525
22	44	66	88	110	132	154	176	198	220	242	264	286	308	330	352	374	396	418	440	462	484	506	528	550
23	46	69	92	115	138	161	184	207	230	253	276	299	322	345	368	391	414	437	460	483	506	529	552	575
24	48	72	96	120	144	168	192	216	240	264	288	312	336	360	384	408	432	456	480	504	528	552	576	600
25	50	75	100	125	150	175	200	225	250	275	300	325	350	375	400	425	450	475	500	525	550	575	600	625

Występujące w niej ciekawe zależności można wykorzystać na lekcjach od III klasy szkoły podstawowej do III klasy liceum, i to zarówno na lekcjach matematyki, jak i informatyki[50]. Ograniczę się do obserwacji i pytań, pozostawiając Czytelnikom sformułowanie i udowodnienie ogólnych twierdzeń wynikających z tych obserwacji. W końcu to tylko… tabliczka mnożenia. Dostosowując poziom trudności zadań do wieku uczniów, możemy im niektóre własności podać jako ciekawostkę albo polecić ich znalezienie jako samodzielną pracę badawczą.

- Spójrzmy na kwadraty utworzone z liczb położonych tak jak liczby 72, 144, 108, 216 albo 91, 143, 119, 187 czy też 112, 140, 128, 160 umieszczone w szarych polach. Czy to przypadek, że iloczyn liczby „północnowschodniej" i „południowowschodniej" jest równy iloczynowi liczby „północnozachodniej" i „południowozachodniej"? ($72 \cdot 216 = 144 \cdot 108 = 15\,552$, $91 \cdot 187 = 143 \cdot 119 = 17\,017$, $112 \cdot 160 = 140 \cdot 128 = 17\,920$)? Sformułuj ogólne prawo wynikające stąd i udowodnij je. Co z tego wynika dla iloczynu liczb w ramionach krzyża o końcach ramion 72, 144, 108, 216?
- Spójrz na krzyże, których końce ramion wyznaczają okienka zaznaczone grubą czarną linią. Zauważ, że w nich sumy przeciwległych elementów są równe: $190 + 230 = 168 + 252 = 420$, $170 + 250 = 126 + 294 = 420$. Sformułuj ogólne prawo i udowodnij je.
- Przekonaj się o prawdziwości ogólnych zależności, które sformułowałeś powyżej, za pomocą arkusza kalkulacyjnego. Na przykład, żeby przekonać się, że w krzyżu o kształcie takim, jaki tworzą liczby 112, 140, 128, 160, odpowiednie iloczyny będą zawsze równe, sprawdź to w jednym przypadku, a następnie wykorzystaj „adresowanie warunkowe". Zwróć uwagę, że napisałem „przekonaj się o prawdziwości", a nie „udowodnij". Czy rozumiesz różnicę?
- Popatrz na romby o wierzchołkach w czarnych polach tabeli. Pierwszy z nich tworzą liczby 96, 90, 136, 133. Porównajmy sumy przeciwległych elementów: $96 + 133 = 229$, $136 + 90 = 226$. Pozornie nic tu ciekawego. Badamy inne romby: $20 + 84 = 104$, $44 + 57 = 101$. Następnie: $252 + 323 = 575$, $272 + 300 = 572$. Sformułuj i udowodnij ogólne prawo, które… już chyba widzisz.
- Średnia arytmetyczna liczb na obwodzie ośmiokąta (utworzonego przez liczby umieszczone w szarych kółkach) jest równa liczbie stojącej w jego „środku symetrii":

$$\frac{210+220+230+264+300+325+350+360+368+352+336+300+266+247+228+220}{16} = 286$$

Natomiast iloczyny liczb stojących w ukośnych „przeciwległych bokach" ośmiokąta ($228 \cdot 220 \cdot 210 \cdot 368 \cdot 360 \cdot 350$ i $230 \cdot 264 \cdot 300 \cdot 266 \cdot 300 \cdot 336$)

[50] Dziękuję Jerzemu Kołodziejczykowi za zwrócenie mi uwagi na te właściwości zwykłej tabliczki mnożenia.

są równe 488 421 964 800 000. Czy to czysta koincydencja, czy szczególny przypadek jakiegoś ogólnego twierdzenia?

- Spójrzmy na szary kwadrat wypełniony 36 liczbami o wierzchołkach 130, 180, 195, 270. Okazuje się, że iloczyn liczb w lewej górnej ćwiartce i prawej dolnej jest równy iloczynowi liczb z lewej dolnej i prawej górnej ćwiartki. Sformułuj ogólne twierdzenie i udowodnij je. Jeśli znasz jakiś język programowania przystosowany do obliczeń matematycznych (Mathematica, Derive, Mupad), zrób to za jego pomocą. Jeśli nie, to możesz posłużyć się arkuszem kalkulacyjnym (nie, żeby udowodnić, tylko *zobaczyć*, że tak w gruncie rzeczy musi być). Jeśli nie chcesz i arkusza kalkulacyjnego, to trudno… musisz pomyśleć i sprowadzić zadanie do tych, które już rozwiązywałeś.
- Sprawdź, że suma liczb w pionowych ramionach szarego krzyża widocznego w prawym dolnym rogu tabelki jest równa sumie liczb z ramion poziomych.
- Teraz powinieneś znaleźć samodzielnie wiele innych ciekawych właściwości najzwyklejszej tabliczki mnożenia.

Ćwiczenie 3.10. Przyjrzyj się poniższemu dywanikowi liczbowemu. Odkryj jego ciekawe własności. Udowodnij te własności. Poniżej podpowiadam kilka.

														197			
													170	198			
												145	171	199			
											122	146	172	200			
										101	123	147	173	201			
									82	102	124	148	174	202			
								65	83	103	125	149	175	203			
							50	66	84	104	126	150	176	204			
						37	51	67	85	105	127	151	177	205			
					26	38	52	68	86	106	128	152	178	206			
				17	27	39	53	69	87	107	129	153	179	207			
			10	18	28	40	54	70	88	108	130	154	180	208			
		5	11	19	29	41	55	71	89	109	131	155	181	209			
	2	6	12	20	30	42	56	72	90	110	132	156	182	210			
1	3	7	13	21	31	43	57	73	91	111	133	157	183	211	....		273
	4	8	14	22	32	44	58	74	92	112	134	158	184	212			
		9	15	23	33	**45**	59	75	93	113	135	159	185	213			
			16	24	34	46	60	76	94	114	136	160	186	224			
				25	35	47	61	77	95	115	137	161	187	215			
					36	48	62	78	96	116	138	162	188	216			
						49	63	79	97	117	139	163	189	217			
							64	80	98	118	140	164	190	218			
								81	99	119	141	165	191	219			
									100	120	142	166	192	220			
										121	143	167	193	221			
											144	168	194	222			
												169	195	223			
													196	224			
														225			

Spójrz na iloczyny $1 \cdot 3$, $3 \cdot 7$, $13 \cdot 21$, $10 \cdot 18$, $5 \cdot 11$, $6 \cdot 12$. Co widzisz? Czy zawsze wynik mnożenia sąsiednich liczb z tego samego rzędu poziomego znajdzie się w tym samym rzędzie? Popatrz teraz na iloczyny $2 \cdot 4$, $5 \cdot 9$, $10 \cdot 16$. W których rzędach są położone wyniki? Dlaczego?

Wykorzystaj ten dywanik do pokazania, że suma kolejnych liczb nieparzystych jest kwadratem liczby naturalnej, a następnie znajdź inne intrygujące własności dywanika.

Ćwiczenie 3.11. Zajrzyj do książek, w których opisany jest trójkąt Pascala. Znajdź ciekawe własności „dywanika liczbowego" przez niego utworzonego.

Ćwiczenie 3.12. Spójrz na poniższą ciekawostkę. Czy sądzisz, że warto poszukiwać innych, jeszcze bardziej skomplikowanych zależności?

$$1 + 15 + 42 + 98 + 123 + 179 + 206 + 220 =$$
$$= 3 + 11 + 46 + 92 + 129 + 175 + 210 + 218$$

$$1^2 + 15^2 + 42^2 + 98^2 + 123^2 + 179^2 + 206^2 + 220^2 =$$
$$= 3^2 + 11^2 + 46^2 + 92^2 + 129^2 + 175^2 + 210^2 + 218^2$$

$$1^3 + 15^3 + 42^3 + 98^3 + 123^3 + 179^3 + 206^3 + 220^3 =$$
$$= 3^3 + 11^3 + 46^3 + 92^3 + 129^3 + 175^3 + 210^3 + 218^2$$

$$1^4 + 15^4 + 42^4 + 98^4 + 123^4 + 179^4 + 206^4 + 220^4 =$$
$$= 3^4 + 11^4 + 46^4 + 92^4 + 129^4 + 175^4 + 210^4 + 218^4$$

$$1^5 + 15^5 + 42^5 + 98^5 + 123^5 + 179^5 + 206^5 + 220^5 =$$
$$= 3^5 + 11^5 + 46^5 + 92^5 + 129^5 + 175^5 + 210^5 + 218^5$$

$$1^6 + 15^6 + 42^6 + 98^6 + 123^6 + 179^6 + 206^6 + 220^6 =$$
$$= 3^6 + 11^6 + 46^6 + 92^6 + 129^6 + 175^6 + 210^6 + 218^6$$

Potęgowanie

Pytasz się, Wierchu, swym blaskiem,
Patrzący do mego wnętrza,
Czy wiem już, że wszystkim jest słońce,
Że to potęga najświętsza?

Jan Kasprowicz, *Księga Ubogich — XV*

Sam termin, jakim określamy wielokrotne mnożenie liczby przez samą siebie, może wywołać ową *metafizyczną siłę przyciągającą*, o której pisał Leszek Kołakowski w eseju *Matematyk i mistyk* (zob. wykład *Matematyka z oddali*). Bo tak właśnie jest: jeśli tylko podstawa jest większa od 1, kolejne mnożenia doprowadzają do „potężnych" liczb.