O nauczaniu matematyki

Po co uczę matematyki?

Światy liczbowe

Michał Szurek

tom 2

Korzystając z okazji, składam tu specjalne podziękowanie tym nauczycielom, Czytelniku, co tak dobrze nauczyli cię czytać, pisać i rachować, że… do tej pory umiesz — czego dowodem jest to, że właśnie czytasz ze zrozumieniem te słowa. Dziękuję również moim nauczycielom… za to samo.

Gawęda o sytuacji nauczyciela

Ponoć ostatnią osobą spaloną w Europie na stosie za herezję był w 1826 roku pewien nauczyciel hiszpański! W Polsce Ludowej nie było tak źle, ale (szczególnie w pierwszym okresie) nauczyciel był jeszcze jednym ogniwem indoktrynacji politycznej. To mówiono i pisano otwarcie. Można by powiedzieć, że nauczyciel indoktrynował zawsze. Swoją postawą przekazywał sygnał uczniom. Indoktrynację od wychowania oddziela cienka linia.

Rola i miejsce nauczyciela w społeczeństwie ulegały zmianom, choć kilka spraw się nie zmieniło. Od nauczycieli wymaga się więcej niż od reszty społeczeństwa (a od posłów na Sejm nic, ale wedle stawu grobla), na ogół mówi się o etosie… i to wszystko. Społeczeństwa chętnie mówią o trudzie zawodu, poświęceniu, pasji, szermują frazesami o znaczeniu wychowywania młodzieży. Światli mężowie i światłe białogłowy apelują, by poszanowanie pracy nauczyciela nie ograniczało się do słów. Groch o ścianę. „Co przyjdzie mojemu dziecku z tego, że będzie znało wzór na objętość stożka ściętego, nauczy się o dawno wymarłych gadach bądź o królu Burburyku?”

Co najmniej jeden z wariantów odpowiedzi jest bardzo ważny (o innych co chwilę wspominam w tej książce). Młody człowiek, który pasjonuje się zagadnieniami intelektualnymi, ma mniejszą skłonność do kradzieży, oszustw i… używania kija baseballowego do czego innego niż do gry w baseballa.

Ale już w starożytności sądzono, że dyskusje filozoficzne nie licują z godnością obywatela rzymskiego z patrycjuszowskiego rodu. Filozofię uważano za niebezpieczny rodzaj oświaty, za burzycielkę pobożności i dobrych obyczajów. Jednak opanowanie jej za młodu uznawano za kulturalny obowiązek, dający poszerzenie horyzontów duchowych i umocnienie postaw moralnych — a także możność zdobycia biegłości w dyskusji i zwyciężenia przeciwnika na polu intelektualnym. Demochares wygłosił mowę, w której przedstawił filozofów (dziś powiedzielibyśmy: intelektualistów) jako perfidnych wrogów demokracji. Przywołał też wcześniejszy o sto lat zarzut Arystofanesa: „filozofia wychowuje ludzi tylko na bladych mędrców, ubogich krętaczy, rozpieszczonych cherlaków”.

Takie podejście do problemów oświaty z niewielkimi zmianami utrzymuje się przez te 2300 lat, jakie dzielą nas od tamtych czasów. Trudno to nazwać inaczej jak hipokryzją… nas wszystkich, bo wszyscy tworzymy społeczeństwo.

Na trudną sytuację nauczyciela narzekał nawet święty Augustyn: „W swoim domu zebrałem gromadkę uczniów i w ten sposób najpierw im, a potem dzięki nim i innym dałem się poznać. Ale oto okazało się, że w Rzymie panują pewne obyczaje, z którymi nie zetknąłem się w Afryce. Oświadczono mi co prawda, że nie spotyka się tutaj takich wybryków, jakich dopuszcza się tam zdeprawowana młodzież, ale »zdarza się — powiedzieli — że grupa uczniów umawia się, że nie uiści zapłaty nauczycielowi i przenosi się do innego nauczyciela. Z powodu przywiązania do pieniędzy zawodzą zaufanie i uczciwość mają za nic«. Ich więc także znienawidziło moje serce.”[17]

Sokrates, którego matka była akuszerką, chętnie porównywał swoją rolę z przydatnością swojej matki przy „rozwiązaniu”: pomagał wydobyć się jakiejś myśli na świat. Mówił wręcz o „rodzeniu”. Oto końcowe zdania z dialogu Platona *Teajtet*: „Tyle tylko moja sztuka potrafi — więcej nic. Ja nie umiem tego, co inni mężowie wielcy i podziwu godni — dziś i wczoraj. Tę sztukę położniczą ja i moja matka od bogaśmy dostali w udziale — ona pomagała kobietom, a ja ludziom młodym, dzielnym i pięknym. W tej chwili czas mi iść do Portyku Króla, zająć się skargą, którą na mnie Meletos wnosi. Jutro rano, Teodorze, spotkamy się tutaj znowu.”[18] W swojej *Historii filozofii po góralsku* Józef Tischner włożył ten pogląd w usta Jędrka Kudasika, podhalańskiego Sokratesa.

Taki jest klasyczny pogląd na rolę nauczyciela. W literaturze pedagogicznej powtarza się, jeszcze od czasów starożytnych, przypowieść porównującą pedagoga do ogrodnika dbającego o delikatne rośliny. Szczególnie lubił to porównanie Jean Jacques Rousseau. Przejęli to pedagodzy niemieccy XIX wieku i właśnie dlatego *przedszkole* to po niemiecku *Kindergarten*, ogród dziecięcy.

W ostatnich latach rola nauczyciela bywa degradowana do roli instruktora. Od instruktora nauki jazdy nie wymagamy niczego ponad to, by nas nauczył w miarę sprawnego posługiwania się kilkoma dźwigniami i pedałami oraz jazdy zgodnej z przepisami ruchu. „Dobra szkoła” to tylko taka, której absolwenci łatwiej dostają się do szkoły wyższego typu. Dobre zdanie przez uczniów egzaminów (coraz częściej testowych i powierzchownych) bywa coraz częściej jedynym kryterium jakości pracy nauczyciela. Sprawy wychowawcze? Nieważne.

Nauczyciele matematyki mają na ogół dobrą opinię w… literaturze. Oto cytat z autobiograficznej powieści Elżbiety Jackiewiczowej *Wczorajsza młodość*. Młoda nauczycielka — podjęła właśnie pierwszą pracę w kresowym miasteczku w byłym zaborze rosyjskim, są lata trzydzieste — pisze list do koleżanki ze studiów.

---

[17] Święty Augustyn, *Wyznania*, przekł. ks. Jan Czuj, PAX, Warszawa 1955. Istnieje nowszy przekład autorstwa Zygmunta Kubiaka, wydany przez PAX w roku 1987.

[18] Platon, *Teajtet*, przekł. Władysław Witwicki, PWN, Warszawa 1959.

Tak charakteryzuje swoich kolegów: „Matematyka i przyroda. Pan Ptaszyński, tzw. Cosinus, w sile wieku, wysoki, szczupły, stanowczy, świetny matematyk, pierwszy filar szkoły. Pan Niemyski: tzw. Sinus, powierzchowność jak wyżej, wiek ponad 40, dobrze uczy fizyki, dużo wymaga, obojętny, milczący. Drugi filar szkoły. Polonistyka: pan Gomuła, tzw. Galileja, magister z krakowskiego uniwersytetu, rozczochrany, nie domyty, mało interesujący, zarozumiały".

Nauczyciele matematyki są najbardziej rozgarniętymi pedagogami na przykład w powieściach dla młodzieży *Księga Urwisów* Edmunda Niziurskiego, czy *Tydzień do siódmej potęgi* Kazimierza Koźniewskiego, gdzie życie turystyczne organizuje właśnie matematyk. W powieści Tomasza Manna *Wybraniec* o bogatej duchowości bohaterki, Immy, świadczy to, że studiuje matematykę. Nie najlepszy obraz matematyka przedstawił tylko Kornel Makuszyński (*Szatan z siódmej klasy*), choć i tam dziwak Iwo Gąsowski, rozwiązujący nocami równanie Fermata, jest bardzo sympatyczny.

> Gerbert z Aurillac (ok. 946–1003), późniejszy Sylwester II, był pierwszym z dwóch papieży, których pontyfikat przypadł na przełom tysiącleci. Nie był myślicielem oryginalnym, a jego późniejszy wpływ wynikał przede wszystkim z talentu pedagogicznego w zakresie nauk ścisłych. W latach 979–982 wykładał w szkole katedralnej w Reims siedem sztuk wyzwolonych, kładąc nacisk na podstawy matematyki i astronomię. Jego uczniowie wyrażali się z największym podziwem o nim samym i o jego zaangażowaniu w naukę i nauczanie.

Nauczycieli matematyki można podzielić na dwa skrajne typy. Pierwszy przekazuje swoją postawą i działaniem, że matematyka jest ciekawa, łatwa i warto się jej uczyć. Drugi zdaje się mówić: „matematyka to coś strasznie trudnego; ja co prawda świetnie daję sobie z nią radę, ale wam to się nie uda, mimo to będę wam ją siłą wbijał do głowy!". Oczywiście w życiu występuje najczęściej typ pośredni. Pozostawiam każdemu z Czytelników wybór, w którym miejscu tego spektrum chce się znaleźć.

Andrzej Grzegorczyk powiedział na jednym z seminariów, że matematyk ma dwie przyjemności: dowodzenie i konstruowanie. Istotnie, dziś mianem matematyka określa się uczonego, który coś tworzy w matematyce. A tworzenie to odkrywanie nowych twierdzeń i teorii, budowanie nowych pojęć, lepiej ujmujących właściwości badanych przestrzeni. Jest jeszcze i trzeci rodzaj zadowolenia, odczuwany nie tylko przez matematyków, nie tylko przez wszystkich intelektualistów, ale przez wielu zwykłych ludzi: to przyjemność rozumienia. Wykształcony muzycznie meloman może na równi z kompozytorem odczuwać, przeżywać i rozumieć jego muzykę.

Społeczeństwa w ogóle rzadko rozumieją, ile zawdzięczają nauczycielom. *Książki o wychowaniu dzieci* Erazma Glicznera Skrzetuskiego (XVI wiek) podają, że „niejeden ojciec targuje się z nauczycielem o naukę jak o konia (…). Czasem nauczyciel woli za darmo uczyć, aniżeli się tak po rzemieślniczemu targować”.

Przy każdych poważnych zmianach ustrojowych nowe władze bardzo często obiecują nauczycielom, że teraz już będzie normalnie. W Polsce zaczęło się to już po odzyskaniu niepodległości. Warto przemyśleć te fragmenty tekstu z 1922 roku: „Ustawodawczy Sejm polski (…) z poniżonego, krzywdzonego i upośledzonego pod zaborami nauczyciela-parjasa — zrobił pierwszego obywatela Państwa i ustawami z 27 maja 1919 Dz. p. P. Nr 44, z 18 grudnia 1919 Dz. p. P. Nr 2, z 13 lipca 1920 Dz. p. P. Nr 65 unormował prawa i uposażenie nauczycieli szkół powszechnych. Uczynił to Sejm z następujących powodów:

1. W uznaniu wyników dotychczasowej pracy nauczycielstwa na polu wychowania i uświadomienia narodowego szerokich warstw naszego społeczeństwa.
2. Aby wynagrodzić długoletnie krzywdy i upokorzenia pracowników na niwie oświaty.
3. Aby zachęcić tych pracowników do gorliwej i intenzywnej pracy dla dobra odradzającej się i budującej się na nowo Polski.

Wychodzimy z założenia, że szkoła powszechna jest nie tylko zakładem naukowo wychowawczym, ale zarazem i urzędem, który ma wiele różnych spraw poruczonych do załatwienia przez ustawy i przełożone władze szkolne. Nauczyciel(ka) zaś na mocy Ustaw polskich jest nie tylko wychowawcą młodego pokolenia, ale ma zarazem charakter urzędnika państwowego, który musi się znosić wewnątrz i na zewnątrz szkoły z rodzicami dziatwy, gminą, urzędami samorządowemi, parafjalnemi, administracyjnemi, władzami szkolnemi, a niekiedy nawet i sądowemi; musi też robić wiele zapisków, wykazów i zestawień, prowadzić wiele ksiąg dla ewidencji własnej, jako też dla kontroli władz przełożonych.”[19] Inne przepisy z cytowanej książki świadczyły jednak, że feudalizm w 1922 roku nie został całkowicie zniesiony. Oto przykład.

7. Podanie o zezwolenie na zawarcie ślubów małżeńskich.

Nauczyciel (lub nauczycielka) nie mający stałej posady, powinien postarać się o przyzwolenie Rady Szkolnej Powiatowej, jeżeli chce zawrzeć śluby małżeńskie. Śluby, zawarte bez tego zezwolenia, będą uważane za dobrowolne zrzeczenie się posady.

U w a g a: Nauczycielki (nawet stałe), które pragną poślubić kogoś, mającego stałe mieszkanie w innej miejscowości, nie mogą uzyskać zezwolenia na zawarcie ślubów małżeńskich.

[19] Władysław Lewicki, Zenon Zaklika, *Kancelaria szkolna*, Lwów 1922.

Stempel
według
skali

Wzór podania:

ŚWIETNA RADO SZKOLNA!

Do
ŚWIETNEJ RADY SZKOLNEJ
POWIATOWEJ
w ....
N. N.
nauczyciel(ka)
w ....
prosi o zezwolenie
na zawarcie ślubu
małżeńskiego.

Mając zamiar zawarcia ślubu małżeńskiego z (tu wymienić imię i nazwisko narzeczonej, narzeczonego, stan, miejsce zamieszkania) uprasza podpisany (a) najuprzejmiej o udzielenie mu zezwolenia na zamierzony związek małżeński.

Data: ....

Podpis.

A oto cytat, niepochodzący wcale z 2006 roku: „Zawód nauczycielski, zwłaszcza w obecnych stosunkach gospodarczych, wymaga dużego hartu woli, nieraz poświęcenia i samozaparcia. (…) Także uposażenie nauczyciela jest nad wyraz skromne i często nie dosięga nawet minimum egzystencji. Stosunki te, spowodowane obecnym kryzysem gospodarczym, niezawodnie ulegną zmianie na lepsze.”[20]

Po II wojnie światowej natychmiast obiecywano, że „Polska Ludowa wysoko dźwignie nauczyciela, zepchniętego przez władze sanacyjne poniżej poziomu granatowego policjanta”[21]. W późniejszych latach też „pochylano się z troską”: „W minionym okresie państwo nasze, borykając się z licznymi trudnościami, poważnie zaniedbało sprawę nauczyciela. Doprowadziło to do dużej deprecjacji tego zawodu. Zła ekonomicznie sytuacja nauczyciela oddziaływała na niego ujemnie pod wieloma względami. Nie mniej ważny był tu fakt, że nauczyciel, aby wyżyć, musiał szukać różnego rodzaju ubocznych zarobków. (…) Od roku przynajmniej obserwujemy w całym kraju wyraźną zmianę w ustosunkowaniu się (…) do tych spraw. Sprawy szkoły, wychowania, nauczyciela są coraz częściej przedmiotem rzeczowej analizy, dochodzą do głosu potrzeby w tej dziedzinie i władze terenowe usiłują je praktycznie rozwiązywać.”[22]

[20] Henryk Rowid, *Nowa organizacja studiów nauczycielskich w Polsce i zagranicą*, Gebethner i Wolf, Warszawa 1931.

[21] Fragment wystąpienia Stanisława Skrzeszewskiego, dyrektora departamentu w Ministerstwie Oświaty (1946). Zapamiętane przez autora książki z opowieści rodzinnych.

[22] Władysław Gomułka, *O zadaniach szkolnictwa*, Przemówienie na krajowej naradzie aktywu partyjnego 24 września 1958, Książka i Wiedza, Warszawa 1958.

We współczesnej szkole o liczbach niewymiernych mówi się nieprecyzyjnie, niestarannie, ukrywając trudności związane zarówno z samym pojęciem niewymierności, jak i poważniejsze trudności metodologiczne występujące na przykład przy określeniu potęgowania o wykładniku niewymiernym. Najwłaściwszym podejściem wydaje się zbagatelizowanie trudności i określenie symbolu a^b dla niewymiernego wykładnika b jako granicy — nawet nie używając tego słowa — potęg o wykładnikach wymiernych b_n dla ciągu (b_n) zbieżnego do b. Jest to psychologicznie łatwe do zaakceptowania przez uczniów. Nie wdajemy się oczywiście w dowód niezależności granicy od ciągu liczb zbieżnego do b. Wątpiącym możemy zademonstrować obliczenia wykonane za pomocą kalkulatora.

Coś za coś. Przy takim ściśle pragmatycznym podejściu piękny dowód niewymierności $\sqrt{2}$ traci swoją siłę. Uczniowie nie spostrzegą i nie docenią wagi zagadnienia. Trochę szkoda.

Można — przy okazji omawiania praw logiki — wspomnieć o zadaniu, czy istnieje liczba niewymierna, która podniesiona do potęgi niewymiernej jest wymierna. Zadanie to rozwiązuje się bardzo prosto, jeżeli nie zwracamy uwagi na subtelności, które dostrzegali intuicjoniści. Rozpatrzmy bowiem liczbę $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Albo jest ona wymierna, albo niewymierna. Jeśli jest wymierna, to zadanie rozwiązane: liczbę niewymierną $\sqrt{2}$ podnieśliśmy do pewnej potęgi niewymiernej, otrzymując liczbę wymierną. Ale zadanie jest rozwiązane również, jeżeli liczba a jest niewymierna. Obliczając $a^{\sqrt{2}}$, otrzymujemy bowiem:

$$a^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{2} = 2$$

a zatem i w tym przypadku mamy przykład liczby niewymiernej, której pewna potęga o wykładniku niewymiernym jest liczbą wymierną. Intuicjoniści nie uznaliby jednak tego za poprawny dowód: wszak nie wskazujemy konkretnej liczby o własności, o którą nam chodzi!

Propozycja lekcji. Wycieczka w krainę liczb niewymiernych

Stopień trudności: znaczny. Zgodność z programem szkolnym: dość duża. Czas realizacji: w pełnym wymiarze 2 razy po 45 minut, w skróconym: jedna jednostka lekcyjna. Korzyść: ćwiczenia logiczne i rachunki na liczbach niewymiernych.

Głębokie rozumienie teorii niewymierności nie jest potrzebne do zdania matury. Do niedawna trzeba było rozumieć, co to jest liczba niewymierna, wskazywać podstawowe przykłady, umieć udowodnić najbardziej podstawowe fakty i mieć ogólne wyczucie. Teraz i tego nie potrzeba.

Liczby wymierne leżą gęsto na prostej, co znaczy, że między każdymi dwiema różnymi liczbami wymiernymi istnieje inna liczba wymierna. Taką liczbą może być oczywiście średnia arytmetyczna. Bardzo łatwo jest udowodnić, że:

$$\text{jeżeli } a < b, \text{ to } a < \frac{a+b}{2} < b$$

ale i bez żadnych wzorów każdy pojmuje, że średnia dwóch liczb leży między nimi. A zatem w każdym, nawet najmniejszym przedziale liczbowym jest liczba wymierna, a jeśli jest jedna, to i druga (jaka?), trzecia (jaka?) itd. Tak więc w każdym przedziale liczbowym jest nieskończenie wiele liczb wymiernych.

Nie tylko pitagorejczycy, ale i współcześni uczniowie nie mogą z początku pojąć, że chociaż liczby wymierne są położone gęsto na prostej (osi liczbowej), to nie wypełniają jej całej. Uczniom wystarczy dowód, że $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną. Warto ten dowód poprowadzić nieco inaczej, niż to się zwykle robi. Uczniowie wiedzą już, że każdą liczbę można rozłożyć na czynniki pierwsze. Bez trudu można ich przekonać, że rozkład ten jest jednoznaczny. Trzeba tylko precyzyjnie to wysłowić, żeby uniknąć pretensji: jak to jednoznaczny, przecież $6 = 2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$, a więc są dwa różne rozkłady. Następnie przekonujemy uczniów, że w rozkładzie kwadratu liczby na czynniki pierwsze każdy z nich wystąpi w parzystej potędze, albo — inaczej mówiąc — parzystą liczbę razy: jeżeli bowiem liczba pierwsza p jest dzielnikiem liczby naturalnej n, to p^2 jest dzielnikiem n^2.

Przypuśćmy, że $\sqrt{2}$ jest liczbą wymierną, a więc $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ gdzie p, q są liczbami naturalnymi i $q \neq 0$. Podnosząc obie strony tej równości do kwadratu i wykonując stosowne uproszczenia, otrzymujemy $2q^2 = p^2$. Rozłóżmy liczby stojące po obu stronach tej równości na czynniki pierwsze. Widzimy, że po lewej stronie występuje nieparzysta liczba czynników, po prawej parzysta. Równość nie może być prawdziwa.

Dowód ten bardziej trafia do przekonania niż standardowy, z podzielnością. Jest również dowodem nie wprost. Da się łatwiej uogólnić. Polecam następujące ćwiczenia (łatwe dla nauczyciela, kształcące dla ucznia):

Ćwiczenie 5.6. Naśladując powyższy dowód, wykaż, że jeżeli p jest liczbą pierwszą, to $\sqrt{p}$ jest liczbą niewymierną.

Ćwiczenie 5.7. Wiedząc, że $2006 = 2 \cdot 17 \cdot 59$, wykaż, że $\sqrt[15]{2006}$ jest liczbą niewymierną. Wiedząc, że $2007 = 9 \cdot 223$, wykaż, że $\sqrt[2008]{2007}$ jest liczbą niewymierną. Sformułuj i udowodnij w miarę ogólne twierdzenie związane z tymi przykładami.

Ćwiczenie 5.8. Wykaż, że jeżeli b jest liczbą nieparzystą, a n — dowolną liczbą naturalną, to liczba $\sqrt{\frac{b}{2^{2n+1}}}$ jest niewymierna.

Podam dowód. Jest on oparty na tym samym motywie co dowód niewymierności liczby $\sqrt{2}$. Ułamek pod pierwiastkiem jest oczywiście nieskracalny. Załóżmy, że $\sqrt{\frac{b}{2^{2n+1}}} = \frac{p}{q}$, gdzie p, q są liczbami naturalnymi i $q \neq 0$. Podnosząc obie strony tej równości do kwadratu i wykonując stosowne przekształcenia, otrzymujemy $bq^2 = 2 \cdot 2^{2n} \cdot p^2$. Stosujemy podobny argument jak poprzednio: po rozkładzie na czynniki pierwsze po lewej stronie będziemy mieli parzystą liczbę dwójek, po prawej nieparzystą.

Ćwiczenie 5.9. Wykaż, że następujące liczby są niewymierne:

$$\sqrt{2} - 1, \quad \sqrt[3]{2} + \sqrt{2}, \quad \sqrt[3]{2} - \sqrt{2}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{2}}, \quad \frac{\sqrt{5} - 1}{2},$$
$$\sqrt{2 + \sqrt{3}}, \quad \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}, \quad \frac{1}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

Ćwiczenie 5.10. Oto seria zadań o własnościach liczb niewymiernych:
Czy suma liczb niewymiernych musi być liczbą niewymierną?
Czy suma (iloczyn) liczby wymiernej i niewymiernej jest wymierna, czy niewymierna, czy może nie da się tego rozstrzygnąć?
Czy pierwiastek z liczby niewymiernej jest zawsze liczbą niewymierną?

Zadania te wydają się nużące i niecelowe. Jednak nie są to całkiem jałowe rozważania. Ich wartość polega bardziej na logicznej stronie tych prostych rozumowań. Wreszcie, z własności tych należy zdać sobie sprawę, gdy chcemy udowodnić twierdzenie: *W każdym przedziale liczbowym znajduje się nieskończenie wiele liczb niewymiernych.*

Szkic dowodu. Skorzystamy z tego, że w każdym przedziale istnieje nieskończenie wiele liczb wymiernych. Niech będzie dany przedział $(a; b)$. W przedziale $(a - \sqrt{2}; b - \sqrt{2})$ istnieje nieskończenie wiele liczb wymiernych. Dla każdej takiej liczby w liczba $w + \sqrt{2}$ jest niewymierna i należy do przedziału $(a; b)$.

Ćwiczenie 5.11. Wykaż, że liczba $\frac{\sqrt{172\,961}}{1+\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}}$ jest niewymierna. Poprawny, precyzyjny dowód jest łatwy i kształcący, choć może znużyć.

Liczby jako kody

W przedszkolu wieszaki do ubrań są oznaczone rysunkowo: motylek, żabka, piesek, samochodzik. Ostatnio może trafia się i komputer? Ale od pójścia do szkoły przyzwyczajamy się do oznaczeń liczbowych: listy uczniów, kolejność na mecie, cyfry na banknotach, numery linii tramwajowych, numer konta bankowego, NIP i PESEL. Tylko w niektórych przypadkach jest istotne, że są to właśnie liczby. Gdy władze miejskie dojdą do wniosku, że trzeba zlikwidować linię tramwajową,

ISBN 83-7420-053-7
9 788374 200530 >

Przekazujmy naszym uczniom dyskretne sygnały, że matematyka jest najlepsza, najciekawsza, najważniejsza, najbardziej wciągająca. A dopiero na końcu dodawajmy, że także najbardziej wymagająca.

Wykłady Michała Szurka są przeznaczone zarówno dla doświadczonych nauczycieli, jak i dla studentów, którzy dopiero przygotowują się do pracy w szkole. Pierwszym zaproponują nowe podejście do przedstawiania niektórych tematów i zagadnień. Drugim pomogą przezwyciężyć strach przed lekcjami, poznać zasady ich prowadzenia i uporządkować swą wiedzę. Wszystkim dadzą możliwość odkrycia własnego twórczego sposobu na nauczanie, a dzięki temu przekonania uczniów, że matematyka jest i pożyteczna, i interesująca.

W skład serii wchodzi osiem tomów, a każdy z nich gwarantuje lekturę zajmującą, pełną ciekawostek i interesujących komentarzy.

GDAŃSKIE WYDAWNICTWO OŚWIATOWE

www.gwo.pl