

The page features a minimalist design with two gray rectangular blocks on the left side. A thin vertical line runs down the right side of the page, and a horizontal line crosses it, creating a stepped effect. The text is positioned in the upper left quadrant.

Światy liczbowe

We współczesnej szkole o liczbach niewymiernych mówi się nieprecyzyjnie, niestarannie, ukrywając trudności związane zarówno z samym pojęciem niewymierności, jak i poważniejsze trudności metodologiczne występujące na przykład przy określeniu potęgowania o wykładniku niewymiernym. Najwłaściwszym podejściem wydaje się zbagatelizowanie trudności i określenie symbolu a^b dla niewymiernego wykładnika b jako granicy — nawet nie używając tego słowa — potęg o wykładnikach wymiernych b_n dla ciągu (b_n) zbieżnego do b . Jest to psychologicznie łatwe do zaakceptowania przez uczniów. Nie wdajemy się oczywiście w dowód niezależności granicy od ciągu liczb zbieżnego do b . Wątpiącym możemy zademonstrować obliczenia wykonane za pomocą kalkulatora.

Coś za coś. Przy takim ściśle pragmatycznym podejściu piękny dowód niewymierności $\sqrt{2}$ traci swoją siłę. Uczniowie nie spostrzegą i nie docenią wagi zagadnienia. Trochę szkoda.

Można — przy okazji omawiania praw logiki — wspomnieć o zadaniu, czy istnieje liczba niewymierna, która podniesiona do potęgi niewymiernej jest wymierna. Zadanie to rozwiązuje się bardzo prosto, jeżeli nie zwracamy uwagi na subtelności, które dostrzegali intuicjoniści. Rozpatrzmy bowiem liczbę $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Albo jest ona wymierna, albo niewymierna. Jeśli jest wymierna, to zadanie rozwiązane: liczbę niewymierną $\sqrt{2}$ podnieśliśmy do pewnej potęgi niewymiernej, otrzymując liczbę wymierną. Ale zadanie jest rozwiązane również, jeżeli liczba a jest niewymierna. Obliczając $a^{\sqrt{2}}$, otrzymujemy bowiem:

$$a^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$$

a zatem i w tym przypadku mamy przykład liczby niewymiernej, której pewna potęga o wykładniku niewymiernym jest liczbą wymierną. Intuicjoniści nie uznaliby jednak tego za poprawny dowód: wszak nie wskazujemy konkretnej liczby o własności, o którą nam chodzi!

Propozycja lekcji.

Wycieczka w krainę liczb niewymiernych

Stopień trudności: znaczny. Zgodność z programem szkolnym: dość duża. Czas realizacji: w pełnym wymiarze 2 razy po 45 minut, w skróconym: jedna jednostka lekcyjna. Korzyść: ćwiczenia logiczne i rachunki na liczbach niewymiernych.

Głębokie rozumienie teorii niewymierności nie jest potrzebne do zdania matury. Do niedawna trzeba było rozumieć, co to jest liczba niewymierna, wskazywać podstawowe przykłady, umieć udowodnić najbardziej podstawowe fakty i mieć ogólne wyczucie. Teraz i tego nie potrzeba.

Liczby wymierne leżą gęsto na prostej, co znaczy, że między każdymi dwiema różnymi liczbami wymiernymi istnieje inna liczba wymierna. Taką liczbą może być oczywiście średnia arytmetyczna. Bardzo łatwo jest udowodnić, że:

$$\text{jeżeli } a < b, \text{ to } a < \frac{a+b}{2} < b$$

ale i bez żadnych wzorów każdy pojmuję, że średnia dwóch liczb leży między nimi. A zatem w każdym, nawet najmniejszym przedziale liczbowym jest liczba wymierna, a jeśli jest jedna, to i druga (jaka?), trzecia (jaka?) itd. Tak więc w każdym przedziale liczbowym jest nieskończenie wiele liczb wymiernych.

Nie tylko pitagorejczycy, ale i współcześni uczniowie nie mogą z początku pojąć, że chociaż liczby wymierne są położone gęsto na prostej (osi liczbowej), to nie wypełniają jej całej. Uczniom wystarczy dowód, że $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną. Warto ten dowód poprowadzić nieco inaczej, niż to się zwykle robi. Uczniowie wiedzą już, że każdą liczbę można rozłożyć na czynniki pierwsze. Bez trudu można ich przekonać, że rozkład ten jest jednoznaczny. Trzeba tylko precyzyjnie to wysłowić, żeby uniknąć pretensji: jak to jednoznaczny, przecież $6 = 2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$, a więc są dwa różne rozkłady. Następnie przekonujemy uczniów, że w rozkładzie kwadratu liczby na czynniki pierwsze każdy z nich wystąpi w parzystej potędze, albo — inaczej mówiąc — parzystą liczbę razy: jeżeli bowiem liczba pierwsza p jest dzielnikiem liczby naturalnej n , to p^2 jest dzielnikiem n^2 .

Przypuśćmy, że $\sqrt{2}$ jest liczbą wymierną, a więc $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ gdzie p, q są liczbami naturalnymi i $q \neq 0$. Podnosząc obie strony tej równości do kwadratu i wykonując stosowne uproszczenia, otrzymujemy $2q^2 = p^2$. Rozłóżmy liczby stojące po obu stronach tej równości na czynniki pierwsze. Widzimy, że po lewej stronie występuje nieparzysta liczba czynników, po prawej parzysta. Równość nie może być prawdziwa.

Dowód ten bardziej trafia do przekonania niż standardowy, z podzielnością. Jest również dowodem nie wprost. Da się łatwiej uogólnić. Polecam następujące ćwiczenia (łatwe dla nauczyciela, kształcące dla ucznia):

Ćwiczenie 5.6. Naśladując powyższy dowód, wykaż, że jeżeli p jest liczbą pierwszą, to \sqrt{p} jest liczbą niewymierną.

Ćwiczenie 5.7. Wiedząc, że $2006 = 2 \cdot 17 \cdot 59$, wykaż, że $\sqrt[15]{2006}$ jest liczbą niewymierną. Wiedząc, że $2007 = 9 \cdot 223$, wykaż, że $\sqrt[2008]{2007}$ jest liczbą niewymierną. Sformułuj i udowodnij w miarę ogólne twierdzenie związane z tymi przykładami.

Ćwiczenie 5.8. Wykaż, że jeżeli b jest liczbą nieparzystą, a n — dowolną liczbą naturalną, to liczba $\sqrt{\frac{b}{2^{2n+1}}}$ jest niewymierną.

Podam dowód. Jest on oparty na tym samym motywie co dowód niewymierności liczby $\sqrt{2}$. Ułamek pod pierwiastkiem jest oczywiście nieskracalny. Załóżmy, że $\sqrt{\frac{b}{2^{2n+1}}} = \frac{p}{q}$, gdzie p, q są liczbami naturalnymi i $q \neq 0$. Podnosząc obie strony tej równości do kwadratu i wykonując stosowne przekształcenia, otrzymujemy $bq^2 = 2 \cdot 2^{2n} \cdot p^2$. Stosujemy podobny argument jak poprzednio: po rozkładzie na czynniki pierwsze po lewej stronie będziemy mieli parzystą liczbę dwójek, po prawej nieparzystą.

Ćwiczenie 5.9. Wykaż, że następujące liczby są niewymierne:

$$\sqrt{2} - 1, \quad \sqrt[3]{2} + \sqrt{2}, \quad \sqrt[3]{2} - \sqrt{2}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{2}}, \quad \frac{\sqrt{5} - 1}{2},$$

$$\sqrt{2 + \sqrt{3}}, \quad \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}, \quad \frac{1}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

Ćwiczenie 5.10. Oto seria zadań o własnościach liczb niewymiernych:

Czy suma liczb niewymiernych musi być liczbą niewymierną?

Czy suma (iloczyn) liczby wymiernej i niewymiernej jest wymierna, czy niewymierna, czy może nie da się tego rozstrzygnąć?

Czy pierwiastek z liczby niewymiernej jest zawsze liczbą niewymierną?

Zadania te wydają się nużące i niecelowe. Jednak nie są to całkiem jałowe rozważania. Ich wartość polega bardziej na logicznej stronie tych prostych rozumowań. Wreszcie, z własności tych należy zdać sobie sprawę, gdy chcemy udowodnić twierdzenie: *W każdym przedziale liczbowym znajduje się nieskończenie wiele liczb niewymiernych.*

Szkic dowodu. Skorzystamy z tego, że w każdym przedziale istnieje nieskończenie wiele liczb wymiernych. Niech będzie dany przedział $(a; b)$. W przedziale $(a - \sqrt{2}; b - \sqrt{2})$ istnieje nieskończenie wiele liczb wymiernych. Dla każdej takiej liczby w liczba $w + \sqrt{2}$ jest niewymierna i należy do przedziału $(a; b)$.

Ćwiczenie 5.11. Wykaż, że liczba $\frac{\sqrt{172961}}{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt{2}}}$ jest niewymierna. Poprawny, precyzyjny dowód jest łatwy i kształcący, choć może znużyć.

Liczby jako kody

W przedszkolu wieszaki do ubrań są oznaczone rysunkowo: motylek, zabka, piesek, samochodzik. Ostatnio może trafia się i komputer? Ale od pójścia do szkoły przyzwyczajamy się do oznaczeń liczbowych: listy uczniów, kolejność na mecie, cyfry na banknotach, numery linii tramwajowych, numer konta bankowego, NIP i PESEL. Tylko w niektórych przypadkach jest istotne, że są to właśnie liczby. Gdy władze miejskie dojdą do wniosku, że trzeba zlikwidować linię tramwajową,