O nauczaniu matematyki

Zasady dydaktyczne, metody, sposoby i formy nauczania

Starzy znajomi

Michał Szurek

tom 3

Zasada stopniowania trudności

To najpierwsza, najbardziej zrozumiała, najpełniej akceptowana zasada. Można ją wyrazić następująco. Przy nauczaniu należy przechodzić od rzeczy łatwiejszych do trudniejszych, od prostych do złożonych, od rzeczy bliższych uczniom do dalszych, od lepiej znanych do mniej znanych. Każda nowa informacja powinna być z reguły pewnym dodatkiem do poprzednich, poznanych i dobrze utrwalonych wiadomości. Każda nowa umiejętność powinna być rozszerzeniem umiejętności nabytych wcześniej.

$10 - 3 = ?$	$8 - 7 = ?$
$9 - 2 = ?$	$8 - 3 = ?$
$7 - 2 = ?$	$6 - 1 = ?$
$5 - 2 = ?$	$11 - 2 = ?$
$13 - 4 = ?$	$15 - 7 = ?$
$17 - 8 = ?$	$18 - 9 = ?$

2. Oblicz:

a) $\frac{7}{8} - \frac{3}{8} =$	d) $\frac{25}{27} - \frac{13}{27} =$	g) $8\frac{3}{10} - 2 =$ ....
b) $\frac{12}{13} - \frac{1}{13} =$	e) $3\frac{1}{2} - \frac{1}{2} =$	h) $8\frac{3}{5} - 1\frac{1}{5} =$ ....
c) $\frac{7}{11} - \frac{6}{11} =$	f) $3\frac{14}{15} - \frac{6}{15} =$	i) $7\frac{5}{9} - 5\frac{4}{9} =$ ....

Fragment podręcznika niemieckiego z 1816 roku oraz zadanie z zeszytu ćwiczeń z 2005 roku[3]. Zwróć uwagę, że kolejność ćwiczeń w podręczniku niemieckim jest w poziomie, a w obecnym w pionie (w kolumnach).

Zasadę tę stosujemy w każdej sytuacji dydaktycznej: od przedszkola po studia doktoranckie i rozliczne kursy dla dorosłych. Przy nauczaniu dzieci stopniowanie trudności idzie równolegle z rozwojem psychiki. Ale każdy nauczający — mający przygotowanie dydaktyczne lub nie — stosuje tę zasadę intuicyjnie. Dzieci najpierw tylko pomagają nam w pracach domowych, potem wykonują coraz bardziej skomplikowane czynności… i wreszcie nas zastępują. Czeladnik u szewca zaczyna od przynoszenia szpilek. Chirurg, zanim przeprowadzi swoją pierwszą operację, pełni funkcję asystenta. Pierwszy pilot musi przez pewien czas być drugim. „Wrzuceni na głęboką wodę” najczęściej nie zdążą się nauczyć pływać. Jak opisywał Wiktor Suworow, w oddziałach radzieckiego

[3] Stanisław Wojtan, Piotr Zarzycki, *Matematyka 4. Ułamki*, Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, Gdańsk 2005.

Specnazu stosowano właśnie zasadę odwrotną: najtrudniejsze na początek. Cel był jasny: kto przez to przejdzie, nie przestraszy się następnych trudności. A jeśli nie przeszedł, to widocznie nie nadawał się do Specnazu.

Ale nie trzeba szukać aż tak drastycznych przykładów. Na niektórych kierunkach studiów stosuje się podobną selekcję: na początku nauki daje się studentom w kość, żeby odpadli ci, którzy nie są w stanie wytrzymać takiego tempa i stresu. Celem jest jak najszybsze odsianie najgorszych — choćby i nie tych, którzy są najgorsi merytorycznie, tylko z tych czy może innych względów nie wytrzymują.

W szkole takie sytuacje nie powinny mieć w ogóle miejsca. Ale — bardzo ostrożnie — warto wykorzystać zapał i emocje uczniów towarzyszące im na początku roku szkolnego i zanim się zorientują, wprowadzić coś trudnego i nie całkiem ciekawego. W szkole im. Gottwalda (obecnie: Staszica) w Warszawie w pewnej pierwszej klasie licealnej przez pierwszy miesiąc dało się dokładnie omówić geometrię aksjomatyczną i logikę. Zanim uczniowie się spostrzegli, byli już porządnie wykształceni w podstawach matematyki. Niezależnie bowiem, czy warto tych zagadnień uczyć w szkole, czy nie, ich znajomość zawsze jest przydatna. Jeżeli można to zrobić „bezboleśnie”, tanim kosztem, to warto wykroczyć przeciwko zasadzie stopniowania trudności (i kilku innym też).

Ćwiczenie 6.1. Weź dowolny podręcznik szkolny i sprawdź, czy został on napisany z uwzględnieniem zasady stopniowania trudności. Przede wszystkim zwróć uwagę na zadania i ćwiczenia na końcu każdego rozdziału. Zacznij od widocznego poniżej fragmentu podręcznika[4].

3. Rozwiąż nierówność:

a) $(-x+1)(x^2-2) \geqslant 0$

b) $(2-3x)(-3x^2-4x-2) < 0$

c) $-5x(x^2-2x-1) \geqslant 0$

d) $(3-x)(x^2+8x+16) \leqslant 0$

e) $(x^2-3x-10)(x^2-5x) \leqslant 0$

f) $(x^2-10)(3x^2-20) < 0$

g) $(x^2-x)(-x^2+2x+11) \leqslant 0$

h) $(x^2-4x-5)(x^2+3x-4) > 0$

4. Rozwiąż nierówność (najpierw rozłóż wielomian na czynniki):

a) $\frac{1}{2}x^3-5x^2 < 0$

b) $x^3-x^2-6x < 0$

c) $-x^4+3x^3+4x^2 \geqslant 0$

d) $2x^7-3x^6-2x^5 > 0$

e) $-4x^3+3x^2+4x-3 > 0$

f) $-2x^3+x^2+18x-9 \leqslant 0$

g) $x^3+5x^2+8x+40 \leqslant 0$

h) $x^4+x^3-8x-8 \geqslant 0$

[4] Małgorzata Dobrowolska, Marcin Karpiński, Jacek Lech, *Matematyka II. Podręcznik dla liceum i technikum*, Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, Gdańsk 2005.

5. Rozwiąż nierówność (skorzystaj z twierdzenia Bézout):

a) $3x^3 - x^2 - x - 1 \leqslant 0$

b) $x^3 - x^2 - 3x - 1 \geqslant 0$

c) $-4x^3 + 12x^2 - 5x - 6 < 0$

d) $7x^2 - 2x - 3 \leqslant 2x^3$

e) $x^3 + 3x^2 - 1 > x^2 + 5x + 5$

f) $x^3 + x^2 + x > 2 - 2x^2$

6. **a)** Jaka powinna być wartość p, aby liczba $p^3 + p^2 - 9p$ była większa od 9?

b) Dla jakich liczb naturalnych n liczba $2n^3 + 3n^2 + 4n - 5$ jest większa od liczby $3n^3 - 2n^2 + 15$?

„Myliłby się kandydat na nauczyciela, który by sądził, że istnieją szczegółowe przepisy, wystarczające do przyswojenia sobie »sztuki nauczania«. Praca w szkole jest pracą na materiale żywym, bardzo różnorodnym i zmiennym. Toteż szablony czy schematy lekcyjne, ślepo stosowane, zwykle zawodzą. Nieraz najlepiej przygotowaną lekcję trzeba zmienić, gdy tego wymagać będzie sposób reagowania ze strony uczniów i sytuacja w czasie prowadzenia lekcji. Dobry nauczyciel ma w sobie coś z artysty: musi być zdolny do improwizacji, w najlepszym znaczeniu tego terminu.”[5]

Zasada poglądowości

W tradycyjnym ujęciu zasada poglądowości to postulat zdobywania wiedzy przez bezpośrednie poznawanie rzeczy i procesów. Angielski filozof John Locke (1632–1704) sformułował to tak: „Nihil est in intelectu quod non fuerit ante in sensu” („Niczego nie ma w umyśle, czego by przedtem nie było w zmysłach”). Podobne myśli można zresztą znaleźć już u Arystotelesa. Zasada wydaje się oczywista, a jej stosowanie w nauczaniu postulował jawnie Jan Amos Komenský (1592–1670). Wyznawał ją też znany szwajcarski pedagog i pisarz Johann Heinrich Pestalozzi (1746–1827). Pod wpływem Jeana Jacquesa Rousseau pisał on, że wychowanie i nauczanie należy oprzeć na psychologii, z uwzględnieniem faz rozwoju młodego człowieka. Na owe czasy była to nowość. Jean Piaget wyważył tylko otwarte drzwi, podnosząc do rangi pewnika dydaktycznego zasadę, że z „wiedzieć” musi się wiązać „móc”, a z „wiadomościami” — „zręczność”[6].

Każdy praktyk wie dzisiaj, jak wiele pojęć zdobywamy na drodze myślenia abstrakcyjno-słownego. Dlatego we współczesnej dydaktyce zasada poglądowości

[5] Franciszek Mittek, *Praktyczna metoda nauczania*, Nasza Księgarnia, Warszawa 1947.

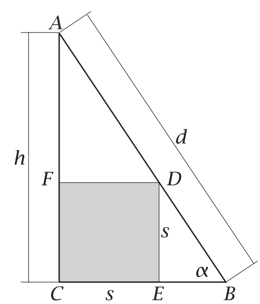
[6] Hans Aebli, *Dydaktyka psychologiczna. Zastosowanie psychologii Piageta do dydaktyki*, tłum. Czesław Kupisiewicz, PWN, Warszawa 1959.
Barry J. Wadsworth, *Teoria Piageta. Poznawczy i emocjonalny rozwój dziecka*, tłum. Małgorzata Babich, WSiP, Warszawa 1998.

Nie. Jedynym rozsądnym sposobem rozdzielenia opon jest założenie kompletu do tylu samochodów, do ilu się da (a więc do 15). Opon nie wystarczy dla dwóch aut. Natomiast nikt przecież nie zrobi tak, że piętnaścioro dzieci dostanie pełne lody z 4 gałkami, jedno — z jedną gałką, a siedemnaste — nic. Jeżeli już naprawdę zgodzimy się, że całe pieniądze mają być wydane na lody, to najsprawiedliwiej będzie kupić dziesięć porcji lodów z czterema gałkami i siedem z trzema. Pełnej porcji lodów zabraknie dla siedmiorga! Wypływa stąd ważny i oczywisty wniosek: zadania z treścią należy redagować bardzo starannie, zwracając uwagę, jak uczniowie *m o g ą* zrozumieć treść. Doskonale pamiętam, jak nauczycielka w IV klasie niesłusznie przekreśliła mi (na czerwono!) *d o b r z e* rozwiązane zadanie. Z kontekstu zadania wynikało bowiem, że chodzi o to, jaką wysokość nad poziom morza osiągnął turysta, który wyszedł rano ze schroniska leżącego na danej wysokości i przez szczyty oraz przełęcze dotarł na wierzchołek góry. Pani kazała zaś obliczać wysokość względną.

Zadania o drabinie

Dobre zadanie to jak dobra melodia… Poniższe zadania są trudne. Można je wykorzystać na kółku matematycznym — na pewno nie na lekcji. Mają jednak kilka interesujących aspektów, które winny zainteresować nauczyciela. Zacznijmy od takiego zadania:

Przy murze ogradzającym ogródek stoi skrzynia sześcienna o krawędzi $s = 40$ cm. Do muru dostawiona jest drabina dotykająca skrzyni. Kąt nachylenia drabiny do poziomu terenu wynosi α. Jak wysoko sięga drabina?

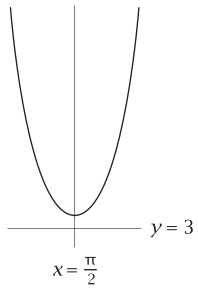


Trudno na pierwszy rzut oka dostrzec, co może być ciekawego w tym zadaniu. Odcinek FA ma długość $s \cdot \operatorname{tg} \alpha$. Zatem drabina sięga do wysokości $h = s(1 + \operatorname{tg} \alpha)$.

Nieco ciekawsze — chociaż z dającą się zgadnąć odpowiedzią — jest zadanie, w którym chodzi o wyliczenie (przy danym s) długości najkrótszej drabiny, którą można tak przystawić. Intuicja podpowiada nam, że drabina musi być nachylona pod kątem 45° i wtedy jej długość jest równa podwojonej przekątnej ściany skrzyni, czyli $2\sqrt{2}s$. Wyliczmy długość d i obliczmy pochodną. Można to zrobić algebraicznie bądź trygonometrycznie. Mamy zatem

$$|AB| = |BD| + |DA| = \frac{|ED|}{\sin \alpha} + \frac{|FD|}{\cos \alpha} = s \cdot \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\cos \alpha} \right)$$

Różniczkowanie zostawiam już Czytelnikowi.



Wykres funkcji $y = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$ dla kątów od 0° do 90° bardzo przypomina parabolę.

Docenimy to zadanie, gdy lekko zmienimy założenia. Załóżmy, że dana jest długość drabiny, a nie kąt. A zatem:

Przy murze ogradzającym ogródek stoi skrzynia sześcienna o krawędzi $s = 40$ cm. Do muru dostawiona jest drabina długości $d = 160$ cm, dotykająca skrzyni. Jak wysoko sięga drabina?

Zacznijmy od sposobów trygonometrycznych. Możemy posłużyć się zależnością: $\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{d}{s}$ i skorzystać z „jedynki trygonometrycznej". Zostawiam to Czytelnikowi. Omówię dokładniej drugi sposób trygonometryczny.

Niech x oznacza długość tej części drabiny, która wystaje ponad skrzynię (w oznaczeniach z rysunku jest to odcinek DA). Zatem

$$\sin\alpha = \frac{|ED|}{|DB|} = \frac{s}{d-x} \quad \text{oraz} \quad \cos\alpha = \frac{s}{x}$$

Wielkości $\frac{s}{d-x}$ i $\frac{s}{x}$ mają tę własność, że

$$\frac{s}{d-x} + \frac{s}{x} = \frac{sd}{x(d-x)} = \frac{d}{s} \cdot \frac{s}{d-x} \cdot \frac{s}{x}$$

Zatem

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{d}{s}\sin\alpha\cos\alpha = \frac{d}{2s}\sin 2\alpha$$

$$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \frac{d^2}{4s^2}\sin^2 2\alpha$$

Otrzymujemy stąd równanie na sinus podwojonego kąta

$$\frac{d^2}{4s^2}\sin^2 2\alpha - \sin 2\alpha - 1 = 0$$

Oznaczmy $\sin 2\alpha$ przez y, a ułamek $\frac{d^2}{4s^2}$ przez a. Równanie $ay^2 - y - 1 = 0$ ma dodatni pierwiastek $\frac{1+\sqrt{4a+1}}{2a}$. Dla danego a możemy teraz obliczyć kąt α — na ogół za pomocą tablic albo kalkulatora.

Z warunku $\sin 2\alpha \leqslant 1$ możemy teraz — i jest to dobre zadanie dodatkowe — wyznaczyć warunek rozwiązalności zadania. Mianowicie z warunku $1 + \sqrt{4a+1} \leqslant 2a$ otrzymujemy $4a + 1 \leqslant 4a^2 - 4a + 1 \geqslant 0$, skąd wyznaczamy zależność między d i s: $d \geqslant 2\sqrt{2}s$, która to zależność jest dość oczywista (drabina nie może być krótsza niż podwojona przekątna ściany skrzyni).

Rozwiążmy teraz to zadanie algebraicznie. To i następne zadanie (o dwóch drabinach) jest pożyteczne z jeszcze jednego punktu widzenia. W szkolnym kursie algebry jest mało zadań, które w naturalny sposób prowadzą do równań wielomianowych stopnia wyższego niż drugi. Tu otrzymamy równanie stopnia czwartego, które — zależnie od doboru danych — uda nam się rozwiązać mniej lub bardziej sprawnie. Przy oznaczeniach jak na rysunku przedstawionym na str. 82 możemy zapisać

$$\frac{s}{|DB|} = \frac{h}{d}, \quad |AD|^2 = |AF|^2 + s^2, \quad |AD| + |DB| = d$$

Po standardowych rachunkach otrzymujemy równanie

$$h^4 - 2sh^3 - \left(d^2 - 2s^2\right) h^2 + 2d^2 sh - d^2 s^2 = 0$$

Pierwiastkami tego równania są:

$$h_1 = \frac{s}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{d^2+s^2} - \frac{1}{2}\sqrt{d^2 - 2s^2 - \frac{2d^2 s}{\sqrt{d^2+s^2}} - \frac{2s^3}{\sqrt{d^2+s^2}}}$$

$$h_2 = \frac{s}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{d^2+s^2} + \frac{1}{2}\sqrt{d^2 - 2s^2 - \frac{2d^2 s}{\sqrt{d^2+s^2}} - \frac{2s^3}{\sqrt{d^2+s^2}}}$$

$$h_3 = \frac{s}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{d^2+s^2} - \frac{1}{2}\sqrt{d^2 - 2s^2 + \frac{2d^2 s}{\sqrt{d^2+s^2}} + \frac{2s^3}{\sqrt{d^2+s^2}}}$$

$$h_4 = \frac{s}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{d^2+s^2} + \frac{1}{2}\sqrt{d^2 - 2s^2 + \frac{2d^2 s}{\sqrt{d^2+s^2}} + \frac{2s^3}{\sqrt{d^2+s^2}}}$$

Tylko dwa pierwsze odpowiadają geometrycznym warunkom zadania. Pierwsze wyrażenie opisuje wysokość drabiny „położonej” (pod kątem nie większym niż 45°), drugie „postawionej” (gdy kąt nachylenia do podłoża jest nie mniejszy niż 45°). Jak je otrzymać? Równanie nie poddaje się standardowym ani bardziej wyrafinowanym zabiegom szkolnym. Można efektownie obejść wszystkie trudności w następujący sposób:

Oznaczmy przez x tę część drabiny, która wystaje ponad skrzynię. Na rysunku jest to odcinek AD. W standardowy sposób dochodzimy do równania czwartego stopnia zmiennej x:

$$x^4 - 2dx^3 + (d^2 - 2s^2)x^2 + 2ds^2 x - d^2 s^2 = 0$$

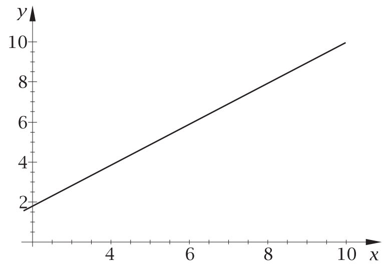
Stosujemy podstawienie Cardana, tj. zamiast x wstawiamy $x + \frac{d}{2}$. To tak, jakbyśmy mierzyli odległości od środka drabiny. Równanie upraszcza się wtedy do dwukwadratowego, które już łatwo rozwiązujemy. Szczegóły pozostawiam Czytelnikowi. Warto prześledzić zależność wysokości h od wielkości d i s. Ustalmy na przykład $s = 1$. Wtedy ogólna zależność

$$h = \frac{s}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{d^2+s^2} + \frac{1}{2}\sqrt{d^2 - 2s^2 - \frac{2d^2 s}{\sqrt{d^2+s^2}} - \frac{2s^3}{\sqrt{d^2+s^2}}}$$

zmienia się w

$$h = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{d^2+1} + \frac{1}{2}\sqrt{d^2 - 2 - \frac{2d^2}{\sqrt{d^2+1}} - \frac{2}{\sqrt{d^2+1}}}$$

Wykres tej funkcji widzimy na poniższym rysunku:

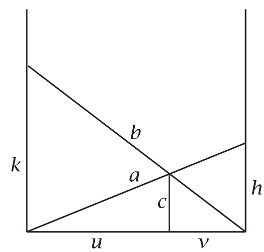


Tak, to prawda! Wykres tej skomplikowanej funkcji jest niemal linią prostą.

Ćwiczenie 7.1. Sprawdź powyższy fakt, wybierając losowo trzy punkty wykresu. Wyznacz równanie *tej* prostej. Co to znaczy *tej*? W zasadzie chodzi o prostą regresji, ale wystarczająco dobrym zadaniem jest wyznaczenie równania linii prostej przechodzącej przez dwa dowolne punkty tego wykresu.

Bardzo teoretycznie można by mierzyć wysokość ściany w sposób zasugerowany przez to zadanie. Musielibyśmy tylko założyć, że ściana jest niedostępna (stąd skrzynia), nie rzuca cienia i mamy drabinę znanej długości, ale nie mamy taśmy mierniczej. Założenia mocno naciągane.

A oto drugie zadanie o drabinie:



W wykopie umieszczono dwie drabiny, jedną o długości a, drugą o długości b. Skrzyżowane są one w sposób pokazany na rysunku. Przecinają się na wysokości c. Wyznacz szerokość wykopu.

Podam tylko sposób rozwiązania. Analizując związki miarowe w widocznych na rysunku trójkątach podobnych, dochodzimy do interesujących zależności:

$$\frac{1}{h} + \frac{1}{k} = \frac{1}{c}, \quad h^2 + (u+v)^2 = a^2, \quad k^2 + (u+v)^2 = b^2$$

A zatem do obliczenia $u + v$ potrzebne będzie h bądź k. Po umiarkowanie żmudnych rachunkach otrzymujemy równanie

$$k^4 - 2ck^3 + (a^2 - b^2)k^2 - 2c(a^2 - b^2)k + c^2(a^2 - b^2) = 0$$

Rozwiązać je jest trudno. Mam jednak dla Czytelnika zadanie, w którym chodzi o… ułożenie zadania.

Przekazujmy naszym uczniom dyskretne sygnały, że matematyka jest najlepsza, najciekawsza, najważniejsza, najbardziej wciągająca. A dopiero na końcu dodawajmy, że także najbardziej wymagająca.

Wykłady Michała Szurka są przeznaczone zarówno dla doświadczonych nauczycieli, jak i dla studentów, którzy dopiero przygotowują się do pracy w szkole. Pierwszym zaproponują nowe podejście do przedstawiania niektórych tematów i zagadnień. Drugim pomogą przezwyciężyć strach przed lekcjami, poznać zasady ich prowadzenia i uporządkować swą wiedzę. Wszystkim dadzą możliwość odkrycia własnego twórczego sposobu na nauczanie, a dzięki temu przekonania uczniów, że matematyka jest i pożyteczna, i interesująca.

W skład serii wchodzi osiem tomów, a każdy z nich gwarantuje lekturę zajmującą, pełną ciekawostek i interesujących komentarzy.

ISBN 83-7420-054-5

9 788374 200547

GDAŃSKIE WYDAWNICTWO OŚWIATOWE

www.gwo.pl