Danuta Zaremba

SZTUKA NAUCZANIA MATEMATYKI

w szkole podstawowej i gimnazjum

Chodzi o to, aby uczniowie stwierdzili, że płacona kwota jest iloczynem liczby osób i ceny biletu. Zapewne łatwo zauważą, jak zmienia się ten iloczyn przy podanych zmianach czynników, gdy będą je uwzględniać po kolei.

Można także rozwiązywać problem geometrycznie, badając, jak zmienia się pole prostokąta przy zwielokrotnianiu jego boków.

Przemienność, łączność i rozdzielność mnożenia

W przeciwieństwie do przemienności dodawania przemienność mnożenia wcale nie jest oczywista. Z życiowego punktu widzenia zamiana czynników często nie ma sensu. Na przykład obliczając kwotę do zapłacenia za 5 kg pomarańcz, których kilogram kosztuje 4 zł, mnożymy $5 \cdot 4$ zł. Czynniki nie są tutaj równorzędne, zatem mnożenie ma sens tylko w takiej kolejności:

$$5 \cdot 4 \text{ zł} = 4 \text{ zł} + 4 \text{ zł} + 4 \text{ zł} + 4 \text{ zł} + 4 \text{ zł}.$$

Jeżeli abstrahujemy od znaczenia czynników i mnożymy $5 \cdot 4$, pamiętając, że wynik oznacza kwotę pieniędzy, to i tak nie widać powodu, dla którego

$$5 \cdot 4 = 4 \cdot 5.$$

Dlaczego 5 kg pomarańcz po 4 zł za kilogram kosztuje tyle co 4 kg pomarańcz po 5 zł za kilogram? Definicja mnożenia nie jest przecież symetryczna:

$$5 \cdot 4 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4, \quad 4 \cdot 5 = 5 + 5 + 5 + 5.$$

Zupełnie nieoczywista jest też łączność mnożenia.

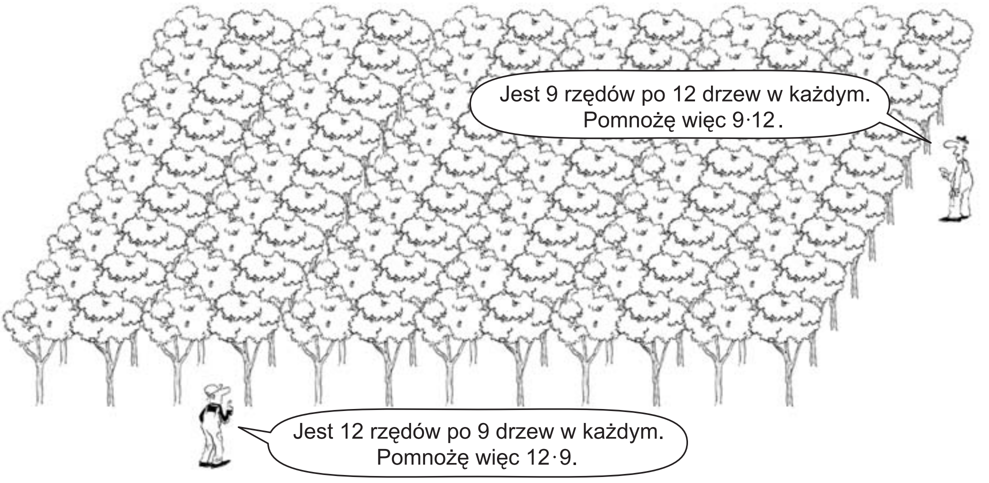
Do sprawnego mnożenia potrzebna jest własność analogiczna do własności $(*)$ (patrz s. 42). Trzeba wiedzieć, że:

$(**)$ *Mnożąc pierwszą liczbę przez drugą, potem wynik przez trzecią itd., możemy – bez wpływu na wynik – liczby te ustawić w dowolnej kolejności, a także możemy każdą parę czynników zastąpić ich iloczynem.*

Tak samo jak w dodawaniu własność $(**)$ jest równoważna koniunkcji prawa przemienności i prawa łączności mnożenia, ale uzasadnienie tego nie jest łatwe dla ucznia. Formalne mechanizmy są w obu przypadkach takie same. Przemawia to za tym, żeby także w mnożeniu nie wyodrębniać praw przemienności i łączności; wystarczy przekonać ucznia, że własność $(**)$ jest prawdziwa.

Jest tu inaczej niż w dodawaniu. Własność $(*)$ jest oczywista, podczas gdy własność $(**)$ wymaga uzasadnienia.

W przypadku dwóch czynników jest to nietrudne. Wystarczy pomyśleć, jak można obliczyć liczbę jabłoni w sadzie, w którym rosną one w 9 rzędach, po 12 drzew w każdym rzędzie.



Obydwaj panowie otrzymają ten sam wynik, bo liczą drzewa w tym samym sadzie:

$$9 \cdot 12 = 12 \cdot 9.$$

Można także odwołać się do modelu geometrycznego, znajdując liczbę kwadratów jednostkowych w prostokącie. W wypadku trzech czynników można znajdować liczbę sześcianów jednostkowych w prostopadłościanie.

A jak postąpić w wypadku większej liczby czynników? Rozumowanie indukcyjne przekracza możliwości ucznia. Trzeba więc znaleźć jakiś inny sposób.

Proponuję postawić uczniom zadanie typu:

> *W sadzie są jabłonie rozmieszczone w a rzędach, w każdym rzędzie jest b drzew, każde drzewo ma c gałęzi, a na każdej gałęzi rośnie d jabłek. Jak obliczyć, ile jabłek rośnie w sadzie?*

Aby usprawiedliwić jednorodność – tyle samo gałęzi na każdym drzewie, tyle samo jabłek na każdej gałęzi – można myśleć o sadzie przedstawionym na jakimś obrazie lub tkaninie. Można też zastąpić drzewa regałami, z których każdy ma tyle samo półek, a na każdej półce jest tyle samo książek. Liczby powinny być tak duże, aby zniechęcić uczniów do wykonywania mnożenia. Chcemy, aby tylko podali różne możliwe sposoby obliczania, nie przeprowadzając żadnych rachunków. Ponieważ wszystkie sposoby prowadzą do obliczenia tego samego (liczby jabłek, liczby książek), więc wyniki są takie same.

Jest to uzasadnienie własności (∗∗) dla czterech czynników. Uczniowie sami spostrzegą możliwość uogólnienia na większą liczbę czynników poprzez dołączanie nowych obiektów. Moi uczniowie mówili, że w jabłkach mogą być robaczki...

Mnożenie, w którym jest więcej niż trzy czynniki, pojawia się rzadko, ale bywa potrzebne. Występuje na przykład przy odkrywaniu sposobu pomnożenia liczb zakończonych zerami:

$$2000 \cdot 300 = \underbrace{2 \cdot 1000} \cdot \underbrace{3 \cdot 100} = \underbrace{2 \cdot 3} \cdot \underbrace{1000 \cdot 100} = 6 \cdot 100\,000.$$

Przy mnożeniu dwóch czynników ustalenie ich kolejności często jest istotne z rachunkowego punktu widzenia. Jeżeli czynniki znacznie się różnią, to z reguły mnożymy większy przez mniejszy, tzn. składnikiem dodawania jest czynnik większy. Na przykład jeżeli czynnikami są liczby 347 i 2, to każdy mnoży $2 \cdot 347$, czyli $347 + 347$, a nie odwrotnie, bo trudno sobie wyobrazić 347 dwójek.

Duża użyteczność prawa przemienności mnożenia była, być może, powodem, dla którego jakiś czas temu w szkolnych podręcznikach próbowano interpretować mnożenie $a \cdot b$ jako liczbę elementów iloczynu kartezjańskiego zbioru a–elementowego i zbioru b–elementowego. Takie określenie iloczynu jest wprawdzie symetryczne, ale bardzo trudno z niego korzystać, bo jest ono zbyt formalne.

Bardzo ważna jest rozdzielność mnożenia względem dodawania. Jest ona intuicyjna i uczniowie potrafią bezbłędnie z niej korzystać w konkretnych przypadkach, szczególnie podczas mnożenia pamięciowego: 3 razy 17 to 3 razy 10 i jeszcze 3 razy 7. Jednak formalne zapisywanie rozdzielności sprawia dosyć często kłopoty. Być może dlatego, że symboliczne zapisywanie czegokolwiek jest dla uczniów z reguły trudniejsze niż mówienie o tym własnymi słowami. Polecenie pozbycia się nawiasu w wyrażeniu $3 \cdot (10 + 7)$ uczniowie często rozumieją dosłownie:

$$3 \cdot (10 + 7) = 3 \cdot 10 + 7.$$

Po prostu przepisują wyrażenie, opuszczając nawias. W wypadku konkretnych liczb łatwo można przekonać uczniów, że popełniają błąd. Gdy tylko obliczą wartości wyrażeń

$$3 \cdot (10 + 7) \quad \text{i} \quad 3 \cdot 10 + 7,$$

stwierdzą, że są różne. Warto też zapoznać uczniów z następującym przekształceniem:

$$3 \cdot (10 + 7) = (10 + 7) + (10 + 7) + (10 + 7) = \underbrace{10 + 10 + 10}_{3 \cdot 10} + \underbrace{7 + 7 + 7}_{3 \cdot 7} = 3 \cdot 10 + 3 \cdot 7.$$

Niech zobaczą, że skoro powiela się ileś razy pewną całość $(10 + 7)$, to powiela się tyle samo razy każdą jej część (tzn. zarówno 10, jak i 7).

To jest chyba najlepsza droga do pokazania rozdzielności, chociaż pierwsze podejście może być bardziej obrazowe, na przykład takie:

> *Jest 14 rzędów po 9 osób i 14 rzędów po 12 osób. Jak obliczyć, ile jest wszystkich osób?*

Najlepiej dobierać takie liczby, aby zniechęcić ucznia do wykonywania obliczeń. Chodzi o to, aby stwierdził, że wartości wyrażeń

$$14 \cdot 9 + 14 \cdot 12 \quad \text{i} \quad 14 \cdot (9 + 12)$$

są równe dlatego, że oznaczają to samo (liczbę wszystkich osób). Takie rozumowanie jest niezależne od podanych liczb, są one nieistotne. Własność jest zatem prawdziwa dla dowolnych liczb.

Dwie interpretacje dzielenia

Dzielenie jest najtrudniejszym z czterech działań. Trudności powstają zarówno przy wykonywaniu tego działania, jak i stosowaniu go do rozwiązywania zadań. W matematyce dzielenie definiuje się za pomocą mnożenia:

$$a : b = c, \quad \text{jeżeli} \quad c \cdot b = a.$$

W nauczaniu matematyki zaczynanie od takiej definicji mija się z celem. Uczeń nie zrozumie, na czym polega dzielenie, i nie będzie umiał stosować go do rozwiązywania problemów z życia codziennego. Lepiej więc zrezygnować z formalnego podejścia do dzielenia i powiązać to działanie z czynnością dzielenia w sensie potocznym. Ta czynność jest dziecku dobrze znana, styka się z nią znacznie wcześniej, niż uczy dzielenia w sensie działania matematycznego.

www.gwo.pl

ISBN 83-88881-78-7

9 788388 881787

- Jak przybliżyć uczniowi matematykę?
- Co zrobić, aby przestał się jej bać?
- Jak wytłumaczyć abstrakcyjne pojęcia?
- Jak dostosować wymagania do możliwości ucznia?

Zbiór wskazówek, pomysłów, praktycznych uwag i propozycji metodycznych, oparty na osobistych doświadczeniach autorki – doktora matematyki i nauczyciela.
Przystępnie napisany i wzbogacony o zabawne ilustracje, stanowi wartościową pomoc zarówno dla początkujących, jak i doświadczonych nauczycieli.

GDAŃSKIE WYDAWNICTWO OŚWIATOWE