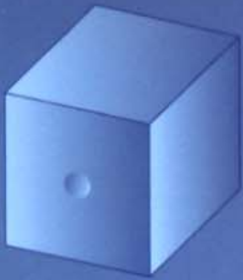
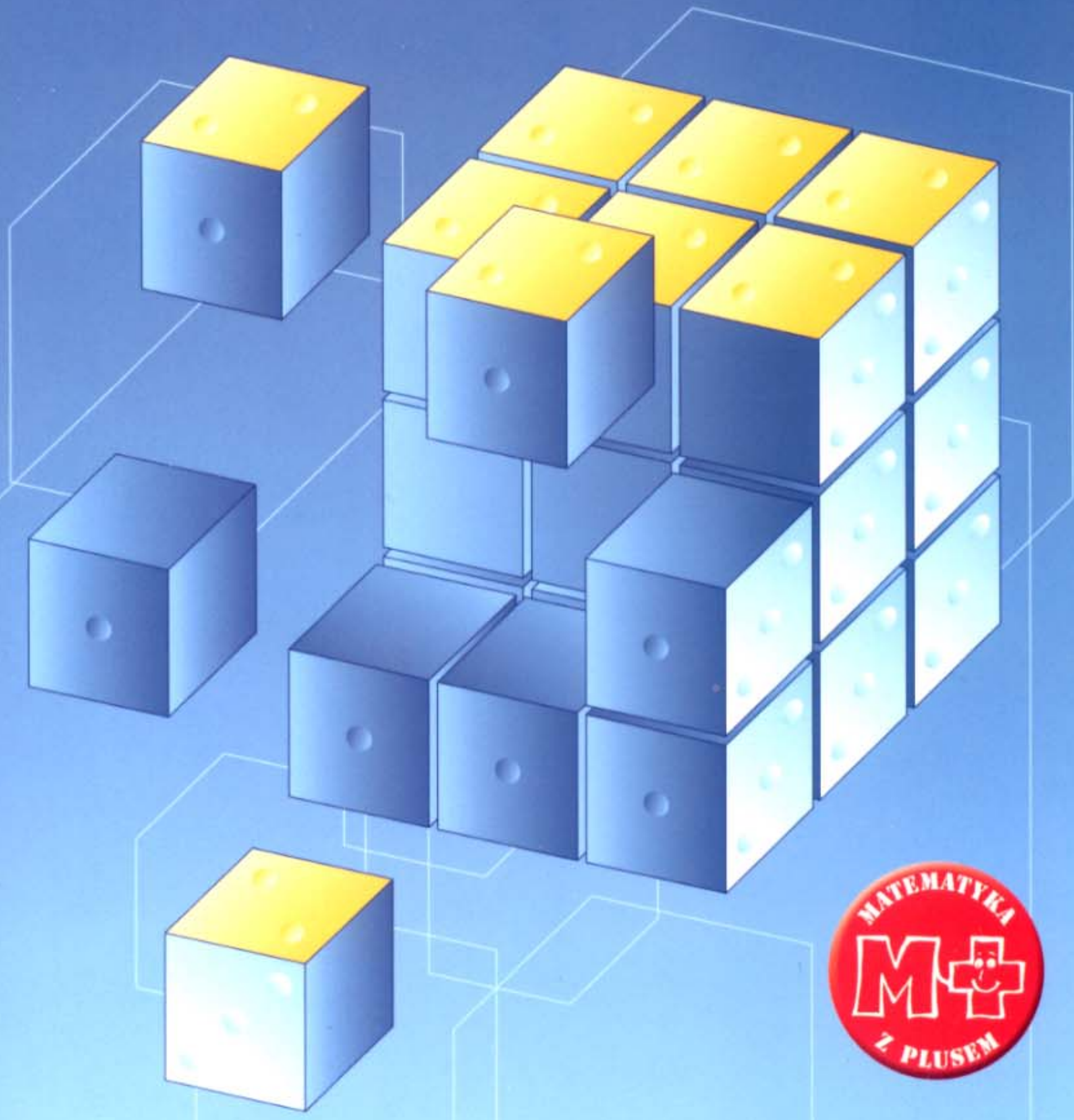
Matematyka w gimnazjum



Jerzy Janowicz

Zbiór zadań konkursowych



Algebra

71. Dla jakiego x wartości wyrażeń w diagramie wyznaczają kwadrat magiczny (sumy liczb w wierszach, kolumnach i na obu przekątnych są równe)?

$6x - 34$	$-x + 15$	$22 - 3x$
$19 - 2x$	$x - 1$	$\frac{1}{2}x$
$\frac{1}{3}x + 4$	$0{,}7x - 3{,}2$	$\frac{2 + 5x}{4}$

72. W ciągu dwóch lat wiek czterech członków pewnej rodziny wzrósł odpowiednio o 4%, 5%, 10% i 20%. O ile procent wzrosła średnia wieku tych czterech osób?

73. Pani Joanna i pan Wojtek prowadzą sąsiednie sklepy z odzieżą. Sprzedają m.in. takie same kożuszki po tej samej cenie. Pewnego dnia jednocześnie zmienili swoje ceny: pani Joanna podwyższyła cenę o 10%, a pan Wojtek obniżył ją o 10%. Nazajutrz — spostrzegłszy, co zrobiono w sąsiednim sklepie — oboje znów zmienili ceny: pani Joanna obniżyła ją o 10 zł, a pan Wojtek — podniósł swoją o 10 zł. Okazało się, że kożuszki znów kosztują tyle samo. Ile kosztowały na początku, a ile po dwóch zmianach cen?

74. Długopis kosztuje o 60% mniej niż piórnik. Piórnik kosztuje o 60% mniej niż plecak. O ile procent plecak jest droższy od długopisu?

75. Na parkingu stały samochody, wśród których 20% stanowiły samochody ciężarowe, a 80% — osobowe. Po pewnym czasie odjechało 20% ciężarówek oraz 80% samochodów osobowych. Jaki procent samochodów, które pozostały na parkingu, stanowią samochody ciężarowe, a jaki — osobowe?

76. Babcia Asia przyniosła na targ 100 jajek, które chciała sprzedać za 32 zł. Gdy sprzedała czwartą część wszystkich jajek, spostrzegła, że część jajek jest popękanych. Odłożyła je zatem na bok i aby zarobić zamierzone 32 zł, resztę jajek sprzedała po 40 gr za sztukę. Oblicz, ile jajek było popękanych.

77. Wojtek chciał kupić grę komputerową. Niestety, oszczędności, zgromadzone przez niego w skarbonce były za małe. — *Mogłaby potanieć, choćby o 10%* — powiedziała jego siostra. — *Niewiele by to pomogło* — odpowiedział Wojtek — *brakowałoby mi jeszcze 4 zł. Ale gdyby gra potaniała o 20%, to mógłbym ją kupić i jeszcze 4 zł by mi zostało*. Ile kosztuje gra i jak duże są oszczędności Wojtka?

78. Dwudziestoprocentowy roztwór cukru rozlano do dwóch naczyń, biorąc do jednego 40%, a do drugiego 60% masy roztworu. Do roztworu w pierwszym naczyniu dosypano tyle cukru, że jego stężenie wzrosło do 60%, a do roztworu w drugim naczyniu dodano tyle cukru, że jego stężenie wzrosło do 40%. Następnie obie części ponownie zmieszano. Jakie stężenie ma końcowy roztwór?

79. Asia i Wojtek otrzymali w poniedziałek po tyle samo cukierków. W tym samym dniu Asia zjadła czwartą część swoich cukierków, a Wojtek zjadł 4 cukierki. We wtorek Asia zjadła trzecią część pozostałych cukierków, a Wojtek — 3 cukierki. W środę Asia zjadła połowę z tego, co jej zostało, a Wojtek — 2 cukierki. Wówczas spostrzegli, że obojgu zostało po tyle samo cukierków. Po ile cukierków mieli na początku?

80. Kolejka w lunaparku jeździ w kółko po szynach, które tworzą dwa współśrodkowe okręgi. Każde koło wagonika ma promień długości 20 cm. Zewnętrzne koło podczas jednego pełnego okrążenia wykonuje o 4 pełne obroty więcej niż wewnętrzne. Jaki jest rozstaw szyn kolejki?

81. Ustal, którą czynność można wykonać na większą liczbę sposobów, mając do dyspozycji wystarczające liczby monet jedno-, dwu- i pięciozłotowych:
a) wypłacenie 44 zł za pomocą 33 monet,
b) wypłacenie 99 zł za pomocą 88 monet.

82. Trzy soczki i dwa batony kosztują 9,60 zł, trzy batony i dwa jogurty kosztują 8,70 zł, a trzy jogurty i dwa soczki kosztują 7,20 zł. Czy 20 zł wystarczy, aby kupić cztery soczki, cztery batony i cztery jogurty?

Algebra

71. Sumy liczb np. z pierwszego wiersza i ze środkowej kolumny muszą być takie same, więc:

$$6x - 34 - x + 15 + 22 - 3x = -x + 15 + x - 1 + 0{,}7x - 3{,}2$$
$$2x + 3 = 0{,}7x + 10{,}8$$
$$1{,}3x = 7{,}8, \text{ czyli } x = 6$$

Obliczamy wartości poszczególnych pól i sprawdzamy, że istotnie tworzą one kwadrat magiczny (zob. rysunek obok).

2	9	4
7	5	3
6	1	8

72. Oznaczmy przez a, b, c, d wiek czterech członków rodziny. Ustalmy początkowy wiek członków rodziny:

$$0{,}04a = 2 \Leftrightarrow a = 50 \qquad 0{,}05b = 2 \Leftrightarrow b = 40$$
$$0{,}10c = 2 \Leftrightarrow c = 20 \qquad 0{,}20d = 2 \Leftrightarrow d = 10$$

Średnia wieku tych osób na początku była równa $\frac{50+40+20+10}{4} = 30$, a po dwóch latach wynosiła $\frac{52+42+22+12}{4} = 32$. W ciągu dwóch lat średnia ta wzrosła o $\left(\frac{32-30}{30} \cdot 100\right)\% = 6\frac{2}{3}\%$.

73. Oznaczmy przez k początkową cenę kożuszków w obu sklepach. Mamy $1{,}1k - 10 = 0{,}9k + 10$, a stąd $k = 100$ oraz $1{,}1 \cdot 100 - 10 = 100$. Tak więc początkowa i końcowa cena kożuszków wynosiła 100 zł.

74. Oznaczmy przez p cenę plecaka. Wtedy piórnik kosztuje $0{,}4p$, a długopis $0{,}16p$. Mamy $\left(\frac{p - 0{,}16p}{0{,}16p} \cdot 100\right)\% = 525\%$.

75. Niech s będzie liczbą wszystkich samochodów znajdujących się na początku na parkingu. Mamy:

- $0{,}2s$ — początkowa liczba samochodów ciężarowych,
- $0{,}8s$ — początkowa liczba samochodów osobowych,
- $0{,}8 \cdot 0{,}2s = 0{,}16s$ — końcowa liczba samochodów ciężarowych,
- $0{,}2 \cdot 0{,}8s = 0{,}16s$ — końcowa liczba samochodów osobowych.

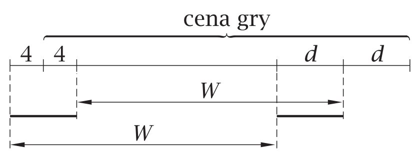
Liczba samochodów ciężarowych i osobowych jest taka sama, więc wśród samochodów, które pozostały na parkingu, 50% stanowią ciężarowe i 50% — osobowe.

76. Czwartą część jajek, czyli 25 sztuk, babcia sprzedała, uzyskując $\frac{1}{4} \cdot 32$ zł $= 8$ zł. Oznaczmy przez x liczbę jajek popękanych. Mamy wtedy:

$$(75 - x) \cdot 0{,}4 = 32 - 8$$
$$30 - 0{,}4x = 24$$
$$0{,}4x = 6$$
$$x = 15$$

Popękanych jajek było 15.

77. Oznaczmy oszczędności zgromadzone przez Wojtka przez W, a 10% ceny gry przez d (zob. rysunek). Odcinki zaznaczone grubą linią są równe, zatem $d = 4 + 4 = 8$ zł,



czyli cena gry wynosi $8 \cdot 10 = 80$ zł. Ponieważ $4 + W + d = 80$, więc $W = 80 - 4 - d = 80 - 4 - 8 = 68$ zł.

78. Oznaczmy przez m początkową masę roztworu. Pierwsza część ma masę $0{,}4m$ i jest w niej $0{,}2 \cdot 0{,}4m = 0{,}08m$ cukru. Druga część ma masę $0{,}6m$ i jest w niej $0{,}2 \cdot 0{,}6m = 0{,}12m$ cukru. Oznaczmy ponadto przez x, y masy cukru dosypywanego odpowiednio do pierwszego i drugiego roztworu. Mamy wtedy dwie równości:

$$\frac{0{,}08m + x}{0{,}4m + x} = 0{,}6 \quad \text{i} \quad \frac{0{,}12m + y}{0{,}6m + y} = 0{,}4$$

z których otrzymujemy $x = 0{,}4m$ i $y = 0{,}2m$. Po zmieszaniu obu roztworów otrzymujemy roztwór o stężeniu:

$$\left(\frac{0{,}2m + x + y}{m + x + y} \cdot 100\right)\% = \left(\frac{0{,}2m + 0{,}4m + 0{,}2m}{m + 0{,}4m + 0{,}2m} \cdot 100\right)\% = \left(\frac{0{,}8m}{1{,}6m} \cdot 100\right)\% = 50\%$$

79. W poniedziałek Asia zjadła czwartą część cukierków, więc zostało jej $\frac{3}{4}$ cukierków. We wtorek zjadła $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ cukierków, więc zostało jej $\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ cukierków. W środę zjadła $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ cukierków. Przez 3 dni zjadła więc $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ cukierków. Wojtek zjadł przez 3 dni $4 + 3 + 2 = 9$ cukierków. Każde dziecko zjadło po tyle samo cukierków, więc $\frac{3}{4}$ wszystkich cukierków Asi to 9 cukierków. Jeśli zatem c oznacza początkową liczbę cukierków, jaką dostało każde dziecko to $\frac{3}{4} \cdot c = 9$, czyli $c = 12$.

80. Oznaczmy promień wewnętrznego okręgu przez r, a zewnętrznego — przez R. Wówczas $2\pi R - 2\pi r = 4 \cdot 2\pi \cdot 20$. Stąd $R - r = 80$. Szukany rozstaw szyn jest zatem równy 80 cm.

81. a) Przeanalizujmy, ile monet można użyć, rozpatrując sytuację w zależności od liczby pięciozłotówek.

Liczba monet			Komentarz
5 zł	2 zł	1 zł	
0	11	22	Wyniki uzyskuje się, rozwiązując układ równań $\begin{cases} x + y + z = 33 \\ 5x + 2y + z = 44 \end{cases}$, gdzie $x, y, z \in \mathbb{N}$
1	7	25	
2	3	28	

b) Rozumując analogicznie jak w a), otrzymujemy trzy możliwości:

$$99\text{ zł} = 11 \cdot 2\text{ zł} + 77 \cdot 1\text{ zł}$$

$$99\text{ zł} = 1 \cdot 5\text{ zł} + 7 \cdot 2\text{ zł} + 80 \cdot 1\text{ zł}$$

$$99\text{ zł} = 2 \cdot 5\text{ zł} + 3 \cdot 2\text{ zł} + 83 \cdot 1\text{ zł}$$

82. Pięć soczków, pięć batonów i pięć jogurtów kosztuje 25,50 zł. Jeden soczek, jeden baton i jeden jogurt kosztuje $25{,}50 : 5 = 5{,}10$ zł. Cztery soczki, cztery batony i cztery jogurty kosztują $5{,}10 \cdot 4 = 20{,}40$ zł, czyli 20 zł na nie nie wystarczy.

83. Oznaczmy przez c liczbę, o której mowa w zadaniu. Mamy $c^2 + c = 380$, czyli $c(c + 1) = 380$. Musimy znaleźć dwie kolejne liczby całkowite, których iloczyn jest równy 380. Wobec rozkładów $380 = 19 \cdot 20 = (-20) \cdot (-19)$ stwierdzamy, że $c = 19$ lub $c = -20$. Dla $c = 19$ mamy $19^2 - 19 = 342$; dla $c = -20$ mamy $(-20)^2 - (-20) = 420$. Gdy zatem daną liczbę odejmiemy od jej kwadratu, otrzymamy 342 lub 420.

84. Oznaczmy przez l, k, d odpowiednio liczbę lip, klonów i dębów na tym skwerze. Mamy wtedy: $d + k \geqslant 11$; $k + l \geqslant 13$; $l + d \geqslant 14$ oraz $d + k + l < 20$. Ustalmy dolne ograniczenie liczby drzew. Mamy: $d+k+k+l+l+d \geqslant 11+13+14$, czyli $2(d+k+l) \geqslant 38$, a stąd $d+k+l \geqslant 19$. Zestawiając to z nierównością $d+k+l < 20$, otrzymujemy $d+k+l = 19$. (Uwaga. Można wyliczyć, że $d = 5$, $l = 6$, $k = 8$).

www.gwo.pl

ISBN 83-7420-047-2
9 788374 200479

Czy jesteś takim nauczycielem, który olimpijskie sukcesy swoich uczniów traktuje jak swoje własne? A może takim, który świetnie się spełnia w organizowaniu konkursów szkolnych i międzyszkolnych?

Czy jesteś takim uczniem, który nie tylko lubi matematykę, ale również uwielbia zwyciężać? A może takim, dla którego sukcesem jest każde samodzielne rozwiązanie trudnego zadania?

Jeśli na któreś z tych pytań odpowiedziałeś twierdząco, możesz uznać, że trafiłeś na odpowiednią książkę.

Charakterystyka:

- zakres materiału dostosowany dla uczniów gimnazjum,
- zawartość – zadania, których rozwiązanie wymaga niestereotypowego myślenia i niestandardowego korzystania z posiadanej wiedzy,
- zastosowanie – przygotowanie do konkursów i olimpiad, zajęcia kółka matematycznego, samodzielna praca ucznia.

GDAŃSKIE WYDAWNICTWO OŚWIATOWE