

---

# Modelowanie

---

# zmienności i ryzyka

---

Metody ekonometrii finansowej

**Małgorzata Doman, Ryszard Doman**



---

**Modelowanie**

---

**zmienności i ryzyka**

---

## SERIA AKADEMICKA

<i>D. Witkowska</i>	PODSTAWY EKONOMETRII I TEORII PROGNOZOWANIA Podręcznik z przykładami i zadaniami
<i>T. Bednarski</i>	ELEMENTY MATEMATYKI W NAUKACH EKONOMICZNYCH Podręcznik dla studentów ekonomii
<i>Pod red. K. Winiarskiej</i>	PODSTAWY RACHUNKOWOŚCI
<i>Pod red. K. Winiarskiej</i>	ZBIÓR ZADAŃ Z PODSTAW RACHUNKOWOŚCI
<i>Pod red. K. Winiarskiej</i>	RACHUNKOWOŚĆ ZAAWANSOWANA
<i>K. Winiarska, M. Kaczurak-Kozak</i>	RACHUNKOWOŚĆ BUDŻETOWA
<i>E. Walińska</i>	MIĘDZYKRAJOWE STANDARDY RACHUNKOWOŚCI Ogólne zasady pomiaru i prezentacji pozycji bilansu i rachunku wyników
<i>M. Andrzejewski, K. Jonas, P. Młodkowski</i>	ZASTOSOWANIE TECHNIK KOMPUTEROWYCH W RACHUNKOWOŚCI Systemy dla małych i średnich przedsiębiorstw
<i>P. Dittmann</i>	PROGNOZOWANIE W PRZEDSIĘBIORSTWIE Metody i ich zastosowanie
<i>M. Ciechan-Kujawa</i>	RACHUNEK KOSZTÓW JAKOŚCI Wykorzystanie w zarządzaniu przedsiębiorstwem
<i>S. Sojak, H. Józwiak</i>	RACHUNEK KOSZTÓW DOCELOWYCH
<i>D.P. Doyle</i>	KONTROLA KOSZTÓW Element zarządzania strategicznego
<i>Pod red. M. Poszwy</i>	ROZLICZENIA PODATKOWE PRZEDSIĘBIORCY
<i>B. Kołosowska, A. Tokarski, M. Tokarski, E. Chojnacka</i>	STRATEGIE FINANSOWANIA DZIAŁALNOŚCI PRZEDSIĘBIORSTW
<i>W. Rogowski</i>	RACHUNEK EFEKTYWNOŚCI INWESTYCJI

## FINANSE I INWESTYCJE

<i>D. Wędzki</i>	ANALIZA WSKAŹNIKOWA SPRAWOZDANIA FINANSOWEGO
<i>Pod red. E. Nowaka</i>	STRATEGICZNE ZARZĄDZANIE KOSZTAMI

Pełna oferta wydawnicza jest dostępna na stronie [www.profinfo.pl](http://www.profinfo.pl)

---

# Modelowanie

---

# zmienności i ryzyka

---

Metody ekonometrii finansowej

Małgorzata Doman, Ryszard Doman

Kraków 2009



**Oficyna**  
a Wolters Kluwer business

Projekt graficzny okładki i zdjęcie  
*Barbara Widlak*

Redaktor  
*Anna Maria Thor*

Korekta  
*Lilianna Rudnik*

Redaktor techniczny  
*Janina Burek*

Skład i łamanie  
*Wydawnictwo „jak” Andrzej Choczewski*

© Copyright by Wolters Kluwer Polska Sp. z o.o. 2009  
All rights reserved.

ISBN 978-83-7526-677-1

Wydane przez:  
Wolters Kluwer Polska Sp. z o.o.

Redakcja Książek  
01-231 Warszawa, ul. Płocka 5a  
tel. 022 535-80-00

31-156 Kraków, ul. Zacisze 7  
tel. 012 630-46-00

e-mail: [ksiazki@wolterskluwer.pl](mailto:ksiazki@wolterskluwer.pl)  
[www.wolterskluwer.pl](http://www.wolterskluwer.pl)

Księgarnia internetowa: [www.profinfo.pl](http://www.profinfo.pl)

---

# Spis treści

---

---

Wstęp .....	9
<b>1. Empiryczne własności finansowych szeregów czasowych.....</b>	<b>15</b>
1.1. Procesy stochastyczne i szeregi czasowe .....	16
1.2. Pojęcie stacjonarności szeregu czasowego .....	17
1.3. Funkcja autokorelacji.....	18
1.4. Testowanie normalności rozkładu .....	19
1.5. Procentowe logarytmiczne stopy zwrotu .....	20
1.6. Fakty empiryczne .....	22
1.7. Od teorii do praktyki .....	34
1.8. Uwagi.....	44
<b>2. Zależności liniowe w szeregach stóp zwrotu instrumentów finansowych....</b>	<b>45</b>
2.1. Testy Boxa–Pierce’a i Ljunga–Boxa .....	45
2.2. Szeregi liniowe .....	46
2.3. Modele autoregresji .....	47
2.4. Modele średniej ruchomej.....	61
2.5. Modele ARMA.....	66
2.6. Od teorii do praktyki.....	71
2.7. Uwagi.....	74
<b>3. Modelowanie heteroskedastyczności warunkowej .....</b>	<b>75</b>
3.1. Ogólna struktura modelu zmienności.....	76
3.2. Testowanie efektu ARCH.....	78
3.3. Model ARCH.....	79
3.4. Modele GARCH.....	81

3.5. Rozkłady błędu stosowane w modelach GARCH .....	85
3.6. Testowanie jakości dopasowania modelu .....	89
3.7. Ocena jakości prognoz .....	94
3.8. Od teorii do praktyki .....	96
3.9. Uwagi .....	104
<b>4. Rodzina modeli typu GARCH .....</b>	<b>105</b>
4.1. Rozszerzenia modelu GARCH( $p,q$ ) .....	105
4.2. Estymacja modeli AR-GARCH metodą największej wiarygodności .....	110
4.3. Od teorii do praktyki .....	112
4.4. Uwagi .....	118
<b>5. Długa pamięć i persystencja w finansowych szeregach czasowych .....</b>	<b>119</b>
5.1. Model ARIMA .....	120
5.2. Model ARFIMA .....	123
5.3. Długa pamięć i persystencja w szeregach zmienności .....	125
5.4. Testowanie stacjonarności i długiej pamięci .....	128
5.5. Od teorii do praktyki .....	133
5.6. Uwagi .....	138
<b>6. Zmienność cen instrumentów finansowych .....</b>	<b>139</b>
6.1. Pojęcie zmienności w ujęciu statycznym i dynamicznym .....	140
6.2. Zmienność zrealizowana .....	142
6.3. Efekty mikrostruktury rynku a zmienność zrealizowana .....	150
6.4. Teoria zmienności zrealizowanej .....	153
6.5. Od teorii do praktyki .....	157
6.6. Uwagi .....	166
<b>7. Modele dwuliniowe .....</b>	<b>167</b>
7.1. Charakterystyka modeli dwuliniowych .....	167
7.2. Modele dwuliniowe a zgrupowania zmienności .....	168
7.3. Od teorii do praktyki .....	170
7.4. Uwagi .....	175
<b>8. Modele zmienności stochastycznej .....</b>	<b>176</b>
8.1. Charakterystyka modeli zmienności stochastycznej .....	177
8.2. Estymacja modelu SVX .....	179

---

8.3. Prognozowanie zmienności za pomocą modeli SV .....	183
8.4. Porównanie wyników uzyskanych za pomocą modeli GARCH i SV .....	184
8.5. Od teorii do praktyki .....	188
8.6. Uwagi .....	195
<b>9. Wartość zagrożona</b> .....	196
9.1. Metody nieparametryczne szacowania wartości zagrożonej .....	198
9.2. Wyznaczanie wartości zagrożonej za pomocą kwantyli warunkowych .....	201
9.3. Zastosowanie parametrycznych modeli zmienności do wyznaczania VaR ....	202
9.4. Metodologia RiskMetrics .....	203
9.5. Test Kupca .....	203
9.6. Test DQT Engle'a i Manganellego.....	205
9.7. Od teorii do praktyki.....	206
9.8. Uwagi.....	218
<b>10. Regresja kwantylowa i modele CAViaR</b> .....	219
10.1. Kwantyle regresyjne .....	219
10.2. Modele CAViaR .....	221
10.3. Estymacja modeli CAViaR .....	223
10.4. Od teorii do praktyki.....	225
10.5. Uwagi .....	238
<b>11. Modele przelącznikowe</b> .....	239
11.1. Modele progowe .....	240
11.2. Modele wygładzonego przejścia.....	240
11.3. Model Hamiltona .....	241
11.4. Modele MS-AR-GARCH.....	246
11.5. Od teorii do praktyki.....	249
11.6. Uwagi .....	264
<b>12. Modelowanie dynamiki zależności warunkowych</b> .....	265
12.1. Ogólny wielowymiarowy model zmienności.....	266
12.2. Zależności liniowe w szeregach wielowymiarowych.....	267
12.3. Model VEC.....	270
12.4. Model BEKK .....	270
12.5. Model stałych korelacji warunkowych.....	271
12.6. Modele dynamicznych korelacji warunkowych.....	272

---

12.7. Modele O-GARCH i GO-GARCH.....	275
12.8. Test stałości korelacji.....	276
12.9. Od teorii do praktyki.....	277
12.10. Uwagi.....	285
<b>13. Wartość zagrożona portfela.....</b>	<b>286</b>
13.1. Metoda symulacji historycznej .....	286
13.2. Szacowanie wartości zagrożonej portfela za pomocą wielowymiarowych modeli GARCH.....	288
13.3. Koherentne miary ryzyka.....	289
13.4. Od teorii do praktyki.....	290
13.5. Uwagi.....	293
Zakończenie .....	295
Dodatek .....	297
Literatura.....	299
Indeks.....	313

---

# Wstęp

---

---

Ekonometria finansowa jest dziedziną, która rozwinęła się z klasycznej ekonometrii, analizy szeregów czasowych oraz finansów. Szeroko rozumiana obejmuje całą tematykę modelowania rynków finansowych, czasami jednak sprowadza się ją do analizy finansowych szeregów czasowych, która niewątpliwie zalicza się do jej głównych nurtów.

Powstanie ekonometrii finansowej datuje się na rok 1982, w którym prestiżowe czasopismo „Econometrica” opublikowało artykuł Roberta Engle’a wprowadzający modele ARCH. Jest to o tyle ciekawe, że praca ta nie dotyczyła rynków finansowych, a jedynie wykorzystywała w modelowaniu inflacji model wychwytyjący zgrupowania zmienności charakterystyczne dla większości szeregów stóp zwrotu z instrumentów finansowych.

Oczywiście już wcześniej publikowane były wyniki, które można by dzisiaj zaliczyć do ekonometrii finansowej. Na pewno należałoby w tym kontekście wymienić wyniki zawarte w pracach Famy oraz Mandelbrota z lat 60. i 70. XX wieku, które stworzyły podstawy do powstania w odpowiednim momencie nowej dyscypliny.

Ekonometria finansowa rozwija się obecnie bardzo gwałtownie, co jest spowodowane nie tylko wzrostem aktywności ośrodków akademickich, w których jest uprawiana, ale również zwiększeniem możliwości komputerów pozwalających na dokonywanie nawet bardzo złożonych obliczeń, gromadzenie i przetwarzanie ogromnej liczby danych, a także ciągłym zapotrzebowaniem zgłaszanym przez praktyków, wynikającym z rozwoju rynków finansowych.

Atrakcyjność ekonometrii finansowej jako dyscypliny badawczej jest związana w dużym stopniu z jej interdyscyplinarnością. Do osiągnięcia sukcesu w jej uprawianiu potrzeba bowiem jednoczesnej znajomości bardzo zaawansowanych i zróżnicowanych metod ilościowych oraz dość szczegółowej wiedzy na temat funkcjonowania rynków finansowych połączonej z ciągłą obserwacją rzeczywistości tych rynków. Jest to trudne, ale, jak nasze doświadczenia dydaktyczne pokazują, często fascynujące wyzwanie dla młodych ludzi.

Niniejsza książka powstała na podstawie materiału badawczego przedstawionego przez autorów w ich monografii opublikowanej w 2004 roku, a także w późniejszych pracach. Stanowi ona znacznie rozszerzoną i uporządkowaną wersję wykładów z modelowania zmienności i ryzyka, prowadzonych przez Małgorzatę Doman od 3 lat na kierunku informatyka i ekonometria w Akademii Ekonomicznej w Poznaniu oraz z ekonometrii finansowej, prowadzonych przez Ryszarda Domana dla specjalności matematyka finansowa i aktuarialna na Uniwersytecie im. Adama Mickiewicza. Nasze doświadczenia pokazują, że (przy raczej dużym zaangażowaniu słuchaczy i wykładowcy) przedstawiony materiał można zrealizować w trakcie semestralnego wykładu.

Książka jest jednak także w stosownym stopniu obrazem naszych doświadczeń z teorii i praktyki modelowania, ponieważ oboje pracujemy aktywnie naukowo w tej dziedzinie. W ramach ograniczonych objętością wykładu, książka może być również traktowana jako monografia przedstawiająca wybrane aspekty wiedzy w zakresie modelowania zmienności.

Niektórym czytelnikom wybór treści przedstawionych w tej książce może wydawać się niekonsekwentny. Czasami szczegółowo tłumaczymy pojęcia uważane za łatwe, a kiedy indziej dość szybko przechodzimy do porządku dziennego nad rzeczami złożonymi. Jest to jednak zamierzone i wynika z naszych doświadczeń związanych z prowadzonymi wykładami. Nie jest niczym nadzwyczajnym, zwłaszcza na kierunkach ekonomicznych, swobodne posługiwanie się pojęciem estymatora bez choćby poprawnej intuicji tego, czym jest zmienna losowa. Wychodząc zatem z założenia, że w trakcie wykładu zamiast długo dochodzić, czy studenci rozumieją podstawowe pojęcia, lepiej jest szybko i krótko je wyjaśnić, przedstawiamy, na przykład, w pierwszym rozdziale w sposób intuicyjny niezbędne informacje na temat prawdopodobieństwa i zbiorów informacji.

W tego typu książce, która z założenia ma być dostępna dla szerokiego grona czytelników, konieczne są pewne uproszczenia i odwołania do intuicji. Kompromis pomiędzy ścisłością a komunikatywnością wydaje nam się niezbędny. Staramy się więc znaleźć pewną równowagę. Czasami, kiedy na założonym poziomie zaawansowania nie można precyzyjnie wyjaśnić pewnych subtelności, wolimy o nich nie wspominać, niż ryzykować mało precyzyjne rozważania. Zakładamy bowiem, że czytelnik zainteresowany głębszymi rozważaniami teoretycznymi sięgnie po kolejne pozycje z literatury, a czytelnik nakierowany na zastosowania praktyczne nabierze doświadczenia przy samodzielnym prowadzeniu oszacowań. Z modelowaniem jest bowiem tak, jak z pływaniem. Nie można się tego nauczyć „na sucho”. Tylko samodzielne szacowanie parametrów kolejnych modeli (i zastanawianie się nad interpretacją uzyskanych wyników) pozwala na zrozumienie zależności występujących pomiędzy zmiennymi i sposobu oddziaływania jednych zmiennych na drugie, czyli po prostu na dobre zrozumienie mechanizmów modeli.

Przyjmujemy też zasadę, że w trakcie lektury czytelnik nabiera doświadczenia. W związku z tym wyjaśnienia w początkowych rozdziałach są dokładniejsze niż w dalszych. Tempo wykładu rośnie a liczba wyjaśnianych szczegółów maleje z rozdziału na rozdział.

W rozdziale 1 przedstawiamy podstawowe wiadomości na temat analizy szeregów czasowych oraz dokonujemy przeglądu tak zwanych faktów empirycznych dotyczących finansowych szeregów czasowych. Własności te stanowią podstawę do konstrukcji i stosowania konkretnych modeli. Z tego powodu dobre zrozumienie materiału przedstawionego w tym rozdziale jest bardzo istotne jako pozwalające na wyrobienie właściwej intuicji.

Rozdział 2 poświęcony jest przedstawieniu modeli AR, MA i ARMA. Ekonometria finansowa koncentruje się przede wszystkim na zależnościach nieliniowych. Jednak przy stosowaniu większości testów wykrywających istnienie tych zależności oraz szacowaniu modeli zmienności istotne znaczenie ma poprawna specyfikacja średniej warunkowej.

W rozdziale 3 omawiamy ogólną konstrukcję modelu zmienności i wprowadzamy modele ARCH( $q$ ) oraz GARCH( $p,q$ ). Charakteryzujemy również rozkłady błędu zwykle stosowane w modelach GARCH. Ponadto rozdział ten zawiera przegląd testów, które można wykorzystywać jako narzędzia oceny dopasowania modelu, oraz miar jakości prognoz.

Rozdział 4 zawiera rozwinięcie teorii dotyczącej modeli GARCH stanowiących najpopularniejszą rodzinę modeli zmienności. Przedstawiamy kolejne rozszerzenia i modyfikacje klasycznego modelu GARCH( $p,q$ ) oraz ich zastosowania w praktyce modelowania. Prezentujemy też metody estymacji modeli GARCH.

W rozdziale 5 zajmujemy się badaniem występowania zależności długookresowych w szeregach stóp zwrotu z instrumentów finansowych. Przedstawiamy modele, które mogą wychwycić to zjawisko, i omawiamy wybrane testy długiej pamięci i stacjonarności.

Rozdział 6 poświęcony jest tematyce zmienności zrealizowanej stanowiącej jeden z głównych nurtów ekonometrii finansowej. Analizujemy pewne aspekty teoretyczne i praktyczne tego pojęcia i w tym kontekście rozważamy problemy jakości prognoz zmienności oraz adekwatnej miary zmienności.

Bardzo krótki rozdział 7 zawiera podstawowe informacje o modelach dwuliniowych i wyjaśnia ich znaczenie w modelowaniu zależności nieliniowych.

Rozdział 8 dotyczy modeli zmienności stochastycznej. Zarówno klasa modeli dwuliniowych, jak i klasa modeli zmienności stochastycznej są postrzegane jako konkurencyjne dla modeli GARCH. Jednak, o ile w wypadku modeli dwuliniowych walka jest przegrana, o tyle modele zmienności stochastycznej zdobywają coraz większą popularność, przede wszystkim w zastosowaniach związanych z wyceną instrumentów pochodnych.

Rozdział 9 jest pierwszym z trzech poświęconych modelowaniu wartości zagrożonej (*Value at Risk* – VaR). Definiujemy w nim podstawowe pojęcia i omawiamy metodę obliczania VaR wykorzystującą oszacowania zmienności, a także przedstawiamy testy pozwalające na ocenę jakości prognoz VaR.

W rozdziale 10 wprowadzamy metodę regresji kwantylowej i przedstawiamy zastosowanie, wywodzących się z niej modeli CAViaR, do szacowania wartości zagrożonej.

Rozdział 11 zawiera rozważania na temat modeli przełącznikowych pozwalających na modelowanie dynamiki szeregów czasowych, w sytuacji gdy jest ona niejednorodna. Omawiamy w nim modele przełącznikowe Hamiltona oraz modele GARCH z przełączaniem typu Markowa, a także, choć mniej dokładnie, modele wygładzonego przejścia.

W rozdziale 12 przechodzimy do świata modeli wielowymiarowych i charakteryzujemy kilka wybranych typów modeli M-GARCH, zwracając szczególną uwagę na ich uproszczone wersje, które mogą być przydatne w zastosowaniach praktycznych w dynamicznej analizie zależności występujących pomiędzy instrumentami dużych portfeli.

Rozdział 13 stanowi naturalną kontynuację rozdziału 12 i jest poświęcony problemowi szacowania wartości zagrożonej dla portfela.

Przedostatni podrozdział każdego rozdziału zawiera prezentację praktycznego działania opisanych w obejmującym rozdziale metod i modeli. Estymacja modeli i obliczenia wykonywane są dla wybranych szeregów z polskiego rynku finansowego. W większości przykładów występują szeregi procentowych logarytmicznych stóp zwrotu indeksów WIG i WIG20, kursu walutowego USD/PLN, akcji spółek Agora i PKN Orlen oraz stopy procentowej WIBOR 3M pochodzące z lat 1995–2003. Szeregi są zróżnicowane i zostały wybrane tak, aby można było na ich przykładzie dobrze zilustrować praktyczne problemy pojawiające się w procesie modelowania. Nie bez znaczenia jest także to, że bardziej szczegółową analizę własności tych szeregów można znaleźć we wspomnianej monografii autorów niniejszej książki z 2004 roku.

Wszystkie obliczenia przedstawione w książce zostały wykonane za pomocą pakietów G@RCH™ 5, Time Series Modelling v4.26 i SsfPack działających w środowisku Ox™ oraz programu MATLAB®.

Kończąc każdy rozdział uwagi i komentarze zawierają odniesienia do literatury i wskazówki dotyczące źródeł pozwalających na poszerzenie przedstawionych treści, a czasami jeszcze na pewne spostrzeżenia dotyczące dyskusyjnych aspektów teoretycznych bądź praktycznych rozważanej tematyki. Przedstawiony tu wybór literatury w żadnym razie nie jest pełny. Wskazane pozycje mają tylko dać czytelnikowi informację o książkach i artykułach, w których może znaleźć więcej wiadomości na temat interesujących go zagadnień. Również dane na

temat prac opisujących badania odnoszące się do polskiego rynku finansowego nie są pełne. Chodziło nam raczej o to, by wskazać grupy badawcze i osoby zajmujące się w Polsce omawianymi zagadnieniami.

Najważniejsze szeregi czasowe wykorzystywane w przykładach empirycznych stanowiących ilustracje do przedstawianych rozważań teoretycznych są dostępne na stronie internetowej: <http://kms.ue.poznan.pl/doman/Modelowanie/Szeregi.zip>.

Ponieważ materiał zawarty w tej książce powstał w ramach wykładów do wyboru, nie byłoby jej, gdyby nie liczne grupy studentów co roku zgłaszających chęć wysłuchania tych wykładów. Bardzo im dziękujemy nie tylko za to, że wybrali nasze wykłady, ale także za to, że przez swoje pytania i wątpliwości zmuszali nas do ciągłej pracy nad ich treścią. Szczególne podziękowania należą się studentom, którzy w roku akademickim 2005/2006 studiowali w Akademii Ekonomicznej w Poznaniu na IV roku specjalności cybernetyka ekonomiczna i wystąpili z inicjatywą uruchomienia wykładów z zakresu modelowania zmienności i ryzyka.

Żadna książka ani żaden wykład nie są doskonałe. Uważny czytelnik zawsze znajdzie błędy czy usterki. Zapewne niejedynemu specjalista, przeglądając naszą książkę, pomyśli „można to było zrobić lepiej”. Na pewno można było. Dlatego też będziemy wdzięczni czytelnikom za wszelkie uwagi i komentarze, które prosimy nadsyłać na adres: [malgorzata.doman@ue.poznan.pl](mailto:malgorzata.doman@ue.poznan.pl) lub [rydoman@amu.edu.pl](mailto:rydoman@amu.edu.pl).