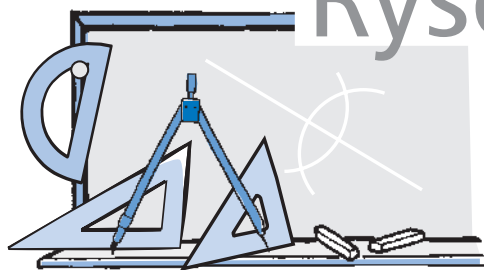




Rysowanie na lekcjach geometrii



Rysowanie i korzystanie z rysunku to ważna umiejętność

■ DANUTA ZAREMBA

Rysunek jako model pojęć geometrycznych

Wszyscy wiemy, jak istotną rolę w geometrii odgrywa rysunek. Dobrze sporządzony pomaga rozwiązać zadanie, pozwalając dostrzec związki między poszczególnymi elementami figur, o których mowa. Rysunek niezbyt udany utrudnia dostrzeżenie tych związków, a często może wręcz sugerować zależności, których *de facto* nie ma.

Rysunki przydają się nie tylko do rozwiązywania zadań z geometrii; pomagają także kształtować pojęcia geometryczne oraz przyczyniają się do odkrywania własności figur.

Na początku edukacji uczeń poznaje mnóstwo pojęć geometrycznych. Wiele z nich ma swoje modele w życiu codziennym i uczeń przychodzi na lekcje geometrii już z pewnym doświadczeniem. Poszerza swoją wiedzę, uczy się wyodrębniać własności definiujące poszczególne pojęcia i zapoznaje się z terminologią matematyczną. Jest oczywiste, że nie

można poznawać pojęcia trapezu czy trójkąta, nie widząc ich modeli. Wobec tego rysujemy. Na tym etapie intensywnie posługujemy się przyborami geometrycznymi. Bardzo istotne jest przy tym, aby w czasie rysowania w zeszytcie nie było kratek ani linijek, ponieważ tylko wtedy posługiwanie się przyborami jest w pełni uzasadnione i uczeń ma okazję nauczyć się stosować je właściwie.

Rysując prostokąt za pomocą ekierki, uczeń zapamiętuje, że jest to czworokąt o wszystkich kątach prostych. Używając cyrkla do odmierzania odcinków spostrzega, że zakreślając okrąg, zaznacza końce odcinków o tej samej długości, skąd już tylko krok do definicji koła i okręgu.

Rysując kilka kątów wpisanych opartych na średnicy koła i mierząc je kątomierzem, uczeń zauważy, że za każdym razem otrzymuje prawie tyle samo, a na dodatek wynik jest zbliżony do 90° . Może to być dobrym punktem wyjścia do teoretycznego zbadania tej miary.

Kryje się tutaj bardzo ważne zagadnienie, zagadnienie odróżniania własności teoretycznych od własności widocznych na rysunku. Jak wiemy, młodszy uczniowie identyfikują rysunek z pojęciem, które on ilustruje. Zadanie uzasadnienia danej własności najczęściej rozumieją jako sprawdzenie tej własności na rysunku. Na przy-



kład mając uzasadnić prostopadłość danych dwóch prostych, używają kątomierza do zmierzenia kąta między tymi prostymi, a wykazanie równości danych odcinków sprowadzają do zmierzenia ich długości.

Jest to postępowanie praktyczne, wynikające z doświadczenia życiowego dziecka. Uczeń jeszcze nie rozumie, że mimo istnienia przedmiotów o kształcie koła czy trójkąta, figury te są tworamii czysto teoretycznymi, a ich własności są konsekwencjami logicznych powiązań między przyjętymi pojęciami. Zrozumienie tego faktu następuje bardzo powoli, przy czym nie wszyscy uczniowie w pełni je osiągają. Nie wszyscy są w stanie oddzielić teorię od rzeczywistości, z czym musimy się pogodzić.


Trzeba czasu i starań nauczyciela, aby uczeń zdał sobie sprawę z właściwej roli rysunku. Myślę, że pewną rolę do spełnienia może mieć tu rysunek odręczny. Odcinek narysowany odręcznie wygląda mniej „prawdziwie” niż odcinek odrysowany od linijki, więc uczniowi łatwiej zrozumieć, że rysowanie jest tylko ilustrowaniem pojęcia. Zrezygnujmy więc czasem z użycia przyborów geometrycznych, pozwalając uczniom na pewną „niestaranność” w rysunkach. Niech uczeń ma szansę zrozumieć, że jakkolwiek rysujemy, jest to zawsze tylko model odcinka, bardziej lub mniej podobny do odcinka w sensie geometrycznym. Oczywiście lepiej, aby podobieństwo było jak największe. Póki więc uczeń nie ma jeszcze wprawnej ręki, niech pomaga sobie linijką. Do rysowania bez przyborów zachęcajmy delikatnie, bo niektórzy uczniowie mogą mieć z tym kłopoty. Jednocześnie pamiętajmy, że im uczeń starszy, tym bardziej przydaje mu się umiejętność rysowania od ręki. Rozwiązując zadanie geometryczne,

nie warto koncentrować się na samej czynności sporządzania rysunku, bo odgrywa on rolę pomocniczą, ułatwiając zrozumienie zadania. Poza tym umiejętność rysowania odręcznego przydaje się także w życiu codziennym.

Kilka propozycji zastosowania przyborów geometrycznych

Wracając do rysowania z użyciem przyborów geometrycznych, chciałabym zwrócić uwagę Czytelników na jeszcze jeden ważny, a chyba niedoceniany aspekt. Mianowicie stosowanie przyborów może w istotny sposób wspomagać przyswajanie przez uczniów rozmaitych własności figur. Polecając uczniom rysowanie różnych figur za pomocą określonych przyborów, sprowokujemy ich do korzystania z własności charakteryzujących daną figurę. Na przykład, rysując za pomocą kątomierza (i linijki) dowolny trójkąt równoramienny, odmierzamy dwa kąty równe przy tym samym odcinku, co gwarantuje równoramiennność trójkąta.

Przytoczę kilka zadań tego typu.

 Za pomocą kątomierza i linijki (bez podziałki) narysuj:

- trójkąt równoboczny,
- parę prostych równoległych,
- równoległobok, w którym jest kąt 40° ,
- trapez, który ma dokładnie jedną oś symetrii.

Pierwsze zadanie jest nietrudne, sprowadza się do narysowania trójkąta z dwoma kątami po 60° . W drugim, trzecim i czwartym zadaniu korzysta się z warunku równoważnego równoległości pary prostych, w którym mowa o równości kątów powstających przy przecięciu tej pary prostych trzecią prostą. Drugie zadanie



można zmodyfikować, zastępując kątomierz ekierką:

[!] Narysuj parę prostych równoległych posługując się ekierką i linijką.

W następnych zadaniach będziemy odmierzać długości. Linijka posłuży więc nie tylko do rysowania odcinków, ale także będziemy korzystać z umieszczonej na niej podziałki.

[!] Za pomocą kątomierza i linijki z podziałką narysuj trójkąt równoboczny o boku 5 cm.

[!] Posługując się ekierką i linijką z podziałką, narysuj dowolny trójkąt równoramienny.

[!] Narysuj równoległobok, posługując się tylko linijką z podziałką.

[!] Narysuj romb, posługując się ekierką i linijką z podziałką.

Pierwsze z tych czterech zadań jest łatwe, uczeń narysuje kąt 60° i odmierzy na jego ramionach 5 cm. W zadaniu drugim rysujemy dowolnie podstawę trójkąta i w jej środku wystawiamy dowolny odcinek prostopadły, który będzie wysokością szukanego trójkąta. W zadaniu trzecim i czwartym zaczynamy od narysowania przekątnych, dobierając je tak, aby wzajemnie dzieliły się na połowy, przy czym w zadaniu czwartym przekątne mają być dodatkowo prostopadłe.

Na koniec zadanie wymagające nieco większej wiedzy:

[!] Narysuj średnicę danego koła, posługując się tylko ekierką i linijką.

W zadaniu tym za pomocą ekierki rysujemy kąt prosty o wierzchołku leżącym na okręgu danego koła, po czym łączymy

odcinkiem dwa pozostałe punkty przecięcia ramion kąta z okręgiem. Jak wiemy, kąt wpisany w koło jest prosty wtedy i tylko wtedy, kiedy jest oparty na średnicy.

Gwoli formalnej ścisłości pozwolę sobie zauważyć, że chociaż w każdym z przytoczonych zadań posługujemy się warunkami charakteryzującymi daną figurę, a więc warunkami równoważnymi jej definicji, to w istocie korzystamy tylko z wynikania w jedną stronę. Na przykład w ostatnim zadaniu korzystamy z implikacji: jeżeli kąt wpisany w koło jest prosty, to jest oparty na średnicy.

W niektórych z przytoczonych zadań trzeba znajdować środek odcinka. Do tego celu, zamiast podziałki na linijce, można z powodzeniem zastosować sznurek. Na przykład:

[!] Narysuj równoległobok, posługując się sznurkiem i linijką (bez podziałki).

Z mojego doświadczenia wynika, że sznurek bardzo pomaga w nauczaniu geometrii. Ale o tym innym razem.

Rysowanie „po kratkach”

Podczas, gdy do rysowania z użyciem przyborów geometrycznych używamy zeszytów „czystych”, do niektórych tematów przydaje się zeszyt w kratkę. Jest on nieoceniony podczas lekcji dotyczących mierzenia obwodu czy pola figur. Można wtedy liczyć kratki, można łatwo zmieniać jednostki.

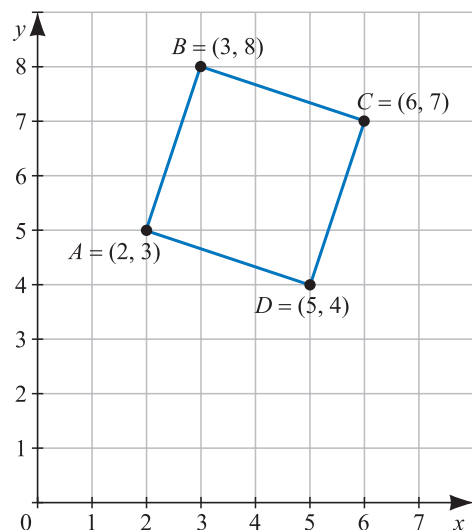
Zeszyt w kratkę przydaje się także wtedy, kiedy rysowanie przestaje być celem samym w sobie, ale odgrywa rolę pomocniczą. Często przecież rozwiązujemy zadanie, którego treść trzeba zilustrować rysunkiem. Kratki z reguły pomagają zrobić taki rysunek.



Kratki są przydatne w zadaniach związanych z układem współrzędnych. Pozwalają łatwo zaznaczać punkty o określonych współrzędnych, pomagają w rysowaniu wykresów różnych funkcji, w tym liniowych. Można odczytywać długości odcinków poziomych lub pionowych, można zauważać różnego rodzaju symetrie. To powoduje, że w niektórych przypadkach można odczytać z rysunku rozwiązanie zadania. Taki przypadek był właśnie na zeszłorocznej maturze próbnej (zadania 28 i 33). Pozwolę sobie przytoczyć zad. 28:

[!] W układzie współrzędnych na płaszczyźnie punkty $A = (2, 5)$ i $C = (6, 7)$ są przeciwległymi wierzchołkami kwadratu $ABCD$. Wyznacz równanie prostej BD .

Zrobienie rysunku na papierze kratkowym pozwala łatwo znaleźć dwa pozostałe wierzchołki kwadratu:



Z rysunku można także odczytać, że współczynnik kierunkowy prostej BD jest równy -2 , a jej punkt przecięcia z osią x ma współrzędne $(7, 0)$. W konsekwencji

prosta ta przecina oś y w punkcie $(0, 14)$. Żądane równanie otrzymujemy więc bez żadnych rachunków.

Rysować, ale nie zawsze

Są zadania geometryczne, które nie wymagają rysowania. Na przykład zadanie obliczenia pola trójkąta o danej podstawie i wysokości czy zadanie znalezienia średnicy koła o danym obwodzie są czysto rachunkowe i rysunki nie pomogą, jeżeli uczeń nie wie, jak się oblicza pola trójkąta lub nie zna wzoru na obwód koła.

Podobnie zadania z geometrii analitycznej dość często nie wymagają rysunku. Zadanie znalezienia równania prostej równoległej (lub prostopadłej) do danej i przechodzącej przez ustalony punkt jest na ogół czysto rachunkowe. Trzeba znać warunki równoległości i prostopadłości prostych i rozwiązać równanie liniowe z jedną niewiadomą. Nie potrzeba również rysunku do znalezienia punktu przecięcia dwóch prostych o danych równaniach czy napisania równań boków trójkąta o danych wierzchołkach.

To wszystko wydawać by się mogło dosyć oczywiste, ale ciągle pamiętam swoje dawne zajęcia z geometrii analitycznej, na których studenci każde zadanie zaczynali od rysowania dwóch prostych prostopadłych, pracowitego i bezmyślnego odmierzania jednostek na każdej półprostej układu współrzędnych i rysowania określonych w zadaniach obiektów. Często zaraz potem okazywało się, że to do niczego nie prowadzi.

Owszem, czasem rysunek może się przydać, chociażby do uporządkowanego zapisania danych. Na przykład mając dane równania boków trójkąta, a szukając jego wierzchołków, warto chyba zapisać te



równania przy bokach narysowanego trójkąta, a potem przyporządkować wierzchołkom obliczone współrzędne. To nam wprowadzi porządek w rachunkach. Zauważmy jednak, że rysowanego trójkąta nie trzeba umieszczać w układzie współrzędnych, szkoda na to czasu i trudu.

Czasem rysunek przydaje się, żeby zobaczyć, ile może być rozwiązań danego zadania i ewentualnie skorygować rachunki, jeżeli nie otrzymaliśmy wszystkich rozwiązań. W takim przypadku rysunek również może być sporządzony poza układem współrzędnych.

Na zakończenie kilka uwag o rysowaniu wykresów funkcji. Absolwenci liceum mają zakodowane, że trzeba zaczynać od sporządzenia tabelki zawierającej kilka punktów, przez które przechodzi wykres danej funkcji. Nie mają natomiast zupełnie podejścia globalnego: nie patrzą na

dziedzinę funkcji, zbiór jej wartości, ograniczoność, punkty przecięcia z osiami, przedziały monotoniczności, ewentualne symetrie czy okresowości itp. To utrudnia racjonalne rysowanie, na przykład nagle okazuje się, jednostka jest dobrana niefortunnie lub powyżej osi x jest za mało miejsca, a miejsce poniżej tej osi jest w ogóle niepotrzebne (bo funkcja przyjmuje tylko wartości dodatnie). Rysując wykres funkcji, chcemy zobaczyć z grubsza jego kształt. Od bardziej dokładnego rysowania mamy programy komputerowe.

W następnym numerze „Matematyki” zajmiemy się konstrukcjami geometrycznymi. □

DANUTA ZAREMBA

autorka książek o nauczaniu matematyki

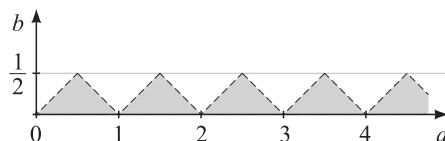


1. Dla $b > 0$ nierówność $|x - a| > b$ jest równoważna alternatywie

$$x - a > b \text{ lub } x - a < -b, \text{ czyli } x > a + b \text{ lub } x < a - b.$$

Warunki zadania będą spełnione, jeśli na przykład: $a - b = \frac{1}{4}$ oraz $a + b = \frac{3}{4}$. Otrzymujemy stąd $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{4}$.

Wszystkie „dobre” pary (a, b) można przedstawić w prostokątnym układzie współrzędnych.



2. Z nałożonych warunków wynika, że $b > 0$ i przedział $[a - b, a + b]$, będący rozwiązaniem nierówności $|x - a| \leq b$, ma długość jeden oraz oba jego końce są liczbami całkowitymi. Zatem $a + b = a - b + 1$, stąd $b = \frac{1}{2}$ i dalej $a = k - \frac{1}{2}$ dla pewnej liczby całkowitej k .

Z łatwością sprawdzamy, że wszystkie pary (a, b) postaci $\left(k - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $k \in \mathbb{C}$ (i tylko te), spełniają warunki zadania.