



Jak uczyłem się matematyki

Nieszablonowe, a nawet ryzykowne działania nauczyciela też mogą przynieść pozytywne rezultaty.

■ ANTONI KOŚCIELSKI

Zapamiętałem troje moich nauczycieli matematyki. Pierwszy z nich, nazwijmy go panem od matematyki, pojawił się nagle wiosną, gdy byłem uczniem piątej klasy szkoły podstawowej, i zapewne z powodu jakichś zdarzeń losowych szkoła była zmuszona zatrudnić dodatkową osobę.

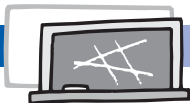
Nauczyciela można oceniać na podstawie formalnego przygotowania do pełnienia zawodu. Niewykluczone, że ta osoba nie miała żadnego. Mógł to być na przykład inżynier, albo nawet ktoś legitymujący się zwykłym świadectwem maturalnym. Było to w czasach, gdy różne funkcje pełniły osoby bez pełnego, formalnego przygotowania. Wtedy jeszcze do roli nauczyciela przygotowywały licea pedagogiczne, a leczeni byliśmy także przez felczerów.

W klasie szóstej miałem już nauczyciela z prawdziwego zdarzenia. Był to absolwent matematycznych studiów pedagogicznych. Jego formalne kwalifikacje były więc bardzo wysokie, trudno

spodziewać się w szkole podstawowej nauczyciela lepiej przygotowanego. Pan profesor (tak będę go nazywać) uczył mnie przez dwa lata, także w siódmej, wtedy ostatniej klasie podstawówki.

W szkole średniej zdobywałem wiedzę pod kierunkiem pani profesor, absolwentki uniwersyteckich studiów matematycznych. Jej kwalifikacje też były bardzo wysokie, ale w rankingu moich nauczycieli powinna raczej znaleźć się na drugim miejscu. W pierwszym rzędzie miała być matematyką, choć przy okazji studiów matematycznych uzyskała także wykształcenie pedagogiczne.

Nauczyciel odnosi sukces zawodowy, jeżeli potrafi dobrze uczyć swoich uczniów. Oczywiście, nie potrafię ocenić moich nauczycieli z tego punktu widzenia. Zwłaszcza, jeżeli ocena miałaby być obiektywna. Mogę jednak spróbować subiektywnie ocenić rolę, jaką odegrali w zdobyciu mojego wykształcenia matematycznego. Umiejętność kształcenia wyróżniającego się i niesforne go ucznia chyba też liczy się w dorobku nauczyciela. Z tak rozumianej roli moi nauczyciele, jak sądzę, wywiązywali się w stopniu odwrotnym do formalnych kwalifikacji. Chętnie uznaję, że rola pana od matematyki była największa, choć także tym razem, różnica między pierwszym i drugim miejscem jest niewielka. Może nawet przyznanie drugiego miejsca pani profesor jest



niesprawiedliwe i w pewnym stopniu uzasadnione potrzebami tego artykułiku.

Przytoczoną opinię powinienem jakoś uzasadnić. Bardzo istotne zdarzenie miało miejsce na pierwszej lekcji przeprowadzonej przez pana od matematyki. Usłyszeliśmy mniej więcej takie oto słowa:

– I tak was niewiele nauczę. Jeżeli ktoś nie chce uczestniczyć w lekcji, może na przykład iść sobie pograć w piłkę.

Ja i kilku moich kolegów wyraziliśmy zainteresowanie taką propozycją. Nie przypominam sobie, aby któraś z koleżanek z niej skorzystała. Nasi rodzice chyba nie dowiedzieli się o takim sposobie prowadzenia lekcji z matematyki. Wtedy nie było też wolnych mediów, zdolnych wytropić najdrobniejszą sensację.

Propozycja nie była oczywiście bezwarunkowa. Aby zwolnić się z lekcji, musieliśmy pokazać rozwiązania wszystkich zamieszczonych w podręczniku zadań dotyczących przerabianego materiału. Nie braliśmy więc udziału w lekcjach. Podczas niektórych rozwiązywaliśmy w zeszytach coraz to nowe zadania. Na pozostałych – gdy była ładna pogoda i zeszyty pełne rozwiązań – przedstawialiśmy plon naszej pracy i prosiliśmy o zwolnienie. Pan od matematyki sprawdzał zeszyty skupiając się na numerach rozwiązanych zadań, a gdy nic nie budziło zastrzeżeń, wpisywał do dziennika piątki i w nagrodę pozwalał wyjść z klasy.

Co pewien czas, gdy zbyt szybko rozwiązywaliśmy zadania, dawały o sobie znać różnice zdań. Pan od matematyki uważał, że powinniśmy zmniejszyć tempo rozwiązywania zadań i jednak na lekcjach nauczyć się kolejnej partii materiału. Ja uważałem, że jesteśmy w stanie poznać następne zagadnienia czytając podręcznik. Cały czas rozwiązywałem coraz to nowe zadania.

W klasie szóstej ponownie uczyliśmy się w powszechnie przyjęty sposób, pod kierunkiem wykwalifikowanego nauczyciela matematyki. Pan profesor szybko się zorientował, że kilku z nas nie umie liczyć, a niektórzy nie opanowali jeszcze tabliczki mnożenia. Wtedy korepetycje nie były popularne, w takiej sytuacji wychowawczyni organizowała raczej pomoc koleżeńską.

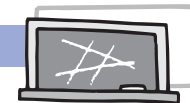
Do dzisiaj pamiętam, dlaczego nie zdał do siódmej klasy mój kolega, któremu miałem pomóc. Pod koniec roku pan profesor zadał mu dwa pytania:

– Ile to jest 6 razy 7? – Po chwili usłyszeliśmy poprawną odpowiedź.

– A 7 razy 6? – Tym razem zapadła cisza, a po dłuższej chwili pan profesor ogłosił decyzję:

– Nie zdałeś do następnej klasy.

Dla mojego kolegi eksperyment pana od matematyki zakończył się źle. Oczywiście, nauczyciel mógł lepiej kontrolować pracę uczniów. Mógł sprawdzać rozwiązania, prosić o przedstawienie rozwiązań wybranych zadań na tablicy, aktywniej przeciwdziałać odpisywaniu. Główną przyczyną niepowodzenia kolegi było jednak niewywiązywanie się z umowy z nauczycielem. Miał rozwiązywać zadania, ale tego nie robił. Ja zadania rozwiązywałem i – jak sądzę – przy okazji nauczyłem się bardzo dużo. I to nie tylko rozwiązywać zadania pewnego typu (w piątej klasie uczyliśmy się wykonywać działania na różnie zapisywanych liczbach i obliczać wartości prostych wyrażeń liczbowych). Dowiedziałem się również, że mogę samodzielnie, bez pomocy nauczyciela nauczyć się rozwiązywania zadań, korzystając wyłącznie z podręczników. Być może wtedy zacząłem zauważać, że rola mistrza w matematyce jest ograniczona. Jeżeli



uczymy się pisać teksty, rysować lub grać na instrumentach, to czyjeś subiektywne uwagi są cenną wskazówką. W matematyce można być całkowicie samodzielnym. Matematyka broni się sama. Także wtedy nauczyłem się chyba pierwszego fragmentu matematyki, a nie tylko przeprowadzania obliczeń. Zobaczyłem, że bardzo ważne są wszystkie regułki, których w podręczniku było mnóstwo i które najczęściej są zmorą uczniów, i to właśnie one mówią, jak obliczać wartości wyrażeń. Nauczyciel jedynie kontroluje, czy poprawnie do nich się stosujemy. Korzystałem jednak z podręcznika w starym stylu, który był książką z matematyki, a nie tekstem mającym uczniom uprzyjemnić naukę jakiegoś dziwnego przedmiotu.

Nie pamiętam, czego uczyłem się w szóstej klasie. W klasie siódmej uczyliśmy się rozwiązywać zadania o pociągach jadących z miasta A do B i niezamkniętych wannach, do których lała się woda. Wiele takich zadań potrafiłem rozwiązać, miałem jednak kłopoty z rozwiązaniem innych. Wydaje mi się, że pan profesor próbował uczyć nas przez pokazywanie przykładów, nie podpowiadając sposobów poszukiwania równań potrzebnych w rozwiązaniach.

Za to doskonale pamiętam ostatnią klasówkę.

Posługiwaliśmy się zbiorem zadań, który był doskonałą pomocą dla nauczyciela przygotowującego sprawdziany. Zawierał wiele zestawów złożonych z trzech różnorodnych zadań. Poszczególne zestawy miały zróżnicowany poziom trudności. Na ostatniej klasówce każdy z nas miał rozwiązać jeden taki zestaw, specjalnie dla niego wybrany przez pana profesora. Ponieważ byłem dobrym uczniem, więc

dostałem zestaw bardzo trudny i nie dałem rady go rozwiązać. Być może nawet dostałem dwóję z klasówki i na świadectwie ukończenia szkoły podstawowej mam tylko czwórkę z matematyki. Długo uważałem, że zostałem skrzywdzony i mam powody nie lubić pana profesora.

Całe szczęście, że wtedy nie było Centralnej Komisji Egzaminacyjnej i uczniowie nie byli oceniani przez państwo. Czwórka z matematyki była tylko decyzją nauczyciela, popartą przez Radę Pedagogiczną. Inne szkoły nie musiały brać jej pod uwagę, przeciwnie do uczelni, które

dzisiaj muszą uwzględniać wyniki egzaminów maturalnych podczas rekrutacji. Nie był to też zły stopień. Bez trudu zdałem egzamin do szkoły średniej. Miał jakąś część pisemną. W części ustnej przyszedł wychowawca również rozmawiał ze mną o ma-

tematyce, a także o Dywizjonie 303 i wypytywał mnie, jakie wyroby chemiczne są produkowane tam, gdzie mieszkam. Po wakacjach, w wieku 13 i pół roku rozpocząłem naukę w dobrym technikum, w dużym mieście, ponad 100 kilometrów od domu. Matematyki zaczęła mnie uczyć pani profesor, która właśnie skończyła studia i podjęła pierwszą pracę.

W nowej szkole bardzo szybko miałem okazję wykorzystać to, czego uczyłem się w klasie piątej. Gdy zaadoptowaliśmy się w nowych warunkach, pod koniec września, pani profesor otworzyła bardzo gruby i nieco większy od zwykłego zeszyt, który przynosiła na każdą lekcję, przepisała na tablicę duże wyrażenie liczbowe, tzw. działanie łączne i poleciła nam wyliczyć na kartkach jego wartość. Zadanie rozwiązałem, choć z trudnościami: wyrażenie nie chciało się ładnie

Stary podręcznik był książką z matematyki, a nie tekstem mającym uczniom uprzyjemnić naukę.



upraszczać. Kilka dni później otrzymaliśmy ocenione rozwiązania. Na moim nie było żadnych uwag, a jedynie ocena: trzy z dwoma minusami. Niby zadanie jeszcze dobrze rozwiązałem, ale właściwie to już źle. Mój sąsiad otrzymał „ładniejszy” wynik i piątkę. Ponieważ byłem przekonany, że liczyłem poprawnie, więc podniosłem rękę i wyraziłem swoje wątpliwości. W odpowiedzi usłyszałem:

– Chodź do tablicy.

Takie polecenie często budzi strach wśród uczniów. Dla mnie trudniejsza była decyzja o podniesieniu ręki, a wątpliwości – jeżeli już zostały zgłoszone – trzeba było jakoś rozstrzygnąć. Przez dwie godziny lekcyjne rozwiązywałem zadanie na tablicy. Sytuacja musiała być napięta. Koledzy zastanawiali się, co z tego wyniknie. Część bała się, że ich piątki zostaną zamienione na dwójki, inni liczyli na podniesienie oceny. Wszyscy mogli porównywać swoje rozwiązania z moim. Pani profesor siedziała w ławce i uważnie studiowała moją kartkówkę. Nie wiem, jak moje wystąpienie zostało odebrane przez słuchaczy. Przypuszczam, że bardziej przypominało rozwiązywanie zadania przez nauczyciela, niż przez ucznia. Nie używałem argumentów, że tak się rozwiązuje zadania tego typu, ani że tak byłem tego uczony, a raczej odwoływałem się do wiedzy zdobytej w piątej klasie i mówiłem, że teraz skorzystam z takiej oto zasady. W końcu otrzymałem ten sam wynik, co na kartkówce.

Pod koniec lekcji pani profesor zaczęła weryfikować wystawione oceny. Piątki nie zostały zmienione, ale część złych ocen została podniesiona. W końcu, już na przerwie usłyszałem:

– Ty, Kościelski, dostaniesz trzy z minusem, bo masz dwie fałszywe równości.

Do dzisiaj nie rozumiem, czemu moja kartkówka została tak oceniona. Uwzględniając moje obecne doświadczenie, na miejscu pani profesor raczej bym powiedział „dostaniesz piątkę, mimo że masz dwie fałszywe równości”. Decyzja była jednak inna i chyba nie uważałem jej za krzywdzącą. Dominowało poczucie satysfakcji, że zadanie dobrze rozwiązałem i wszyscy są o tym przekonani. Nawet pani profesor nie kwestionowała wyniku obliczeń. Poza tym fałszywe równości rzeczywiście istniały, więc argument nauczyciela był nie do podważenia.

Trudno napisać dobre rozwiązanie zadania z jedną fałszywą równością, z dwiema – bardzo łatwo. Przeprowadzając rachunki zrobiłem błąd, który wychwyliłem i skorygowałem wszędzie z wyjątkiem jednego miejsca. Pani profesor też zrobiła dwa błędy. Najpierw starannie sprawdzone wyrażenie przepisała na tablicę bez jednej pary nawiasów. Następnie, oceniając rozwiązania, kierowała się głównie wynikiem.

Zaproponowana przeze mnie ocena kartkówki nie była też obca pani profesor. Przekonałem się o tym po kilku tygodniach, gdy po wywiadówce Mama pokazała mi oceny, które otrzymałem na koniec okresu. Wśród samych ocen dostatecznych znalazła się piątkę z matematyki. Została wystawiona, mimo że zapisy w dzienniku nie uzasadniały nawet czwórki.

Po tej kartkówce zostałem klasowym ekspertem od matematyki. W maturalnej klasie, przy jakiejś okazji pani profesor stwierdziła:

– Ty, Kościelski, powinieneś pójść na matematykę.

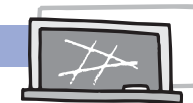
Nie byłem o tym przekonany, zwłaszcza dlatego, że oznaczałoby to zmianę kierunku

kształcenia. Jednak niedługo potem usłyszałem od mojego wychowawcy:

– Masz dwie lewe ręce do analizy (mieliśmy wtedy pracownię z tzw. analizy technicznej). Przestałem się wahać i zdecydowałem podjąć studia matematyczne. Dzięki temu dzisiaj obserwuję, jak studenci rozwiązują zadania matematyczne.

Jesienią studenci pierwszego roku informatyki dostają zadania wymagające indukcji matematycznej. Wtedy wielokrotnie dowiaduję się od nich, że dowód indukcyjny wymaga wykonania trzech kroków. W pierwszym dowodzi się, że interesująca nas własność zachodzi dla liczby 0. W drugim czyni się odpowiednie założenie o liczbie n . Trzeci polega na wykazaniu tej własności dla liczby $n + 1$. Gdy wyrażam zdziwienie, słyszę wyjaśnienie: tak zawsze dowodziliśmy w szkole. Indukcja matematyczna jest zasadą, która często nie jest rozumiana zarówno przez nauczycieli, jak i przez uczniów.

Przedstawiony opis indukcji sugeruje, że krok drugi wykonujemy niezależnie od trzeciego. Krok pierwszy możemy wykonać na końcu. Może więc krok trzeci możemy wykonać na początku dowodu? Jaki sens miałyby wtedy krok drugi? Przecież niczego samoistnie nie zakładamy. Uzasadniając implikację, zwykle zakładamy jej poprzednik, ale jest to część uzasadnienia. Sformułowania twierdzeń często mają postać: Załóżmy, że... Wtedy... Pierwsze zdanie w takim sformułowaniu jest pozbawione sensu, sens mają dopiero oba zdania razem. Dowód indukcyjny polega na wykonaniu pierwszego kroku i wykazaniu w pewien sposób odpowiedniej własności liczby $n + 1$. Nie dowodzimy jej w sposób absolutny: uzasadniając mamy prawo korzystać z tak zwanego założenia indukcyjnego dla liczby n .



Nie chciałbym w tej chwili pisać więcej na temat indukcji. Z moich doświadczeń wynika, że wielu rzeczy, także indukcji, można się nauczyć samemu, korzystając z podręczników. Dlaczego więc ten prosty mechanizm przestał funkcjonować? Uczniowie mogą korzystać z podręczników szkolnych. Nauczyciele nie powinni mieć problemów również z dotarciem do podręczników akademickich, a nawet monografii.

Wiele chyba ostatnio uległo zmianie. Pojawiło się kontrowersyjne źródło wiedzy, jakim jest Internet. Może uczniowie zadawają się powierzchowną informacją internetową, a książkę traktują wyłącznie jako zbiór zadań. Trudno też znaleźć wyczerpujące informacje w dzisiejszych podręcznikach. Może jest z nimi tak, jak z moją książką o herbacie: została ona napisana na zlecenie wydawcy przez osobę, która co prawda sprawnie pisała, ale wcześniej miała niewielkie pojęcie o herbacie.

Moi nauczyciele też żyli i pracowali w innych warunkach. Jak jeszcze niedawno większość ludzi, w szkołach, na uniwersytetach zdobywali wiedzę, a niekoniecznie uprawnienia. Nie zawsze dużo umieli, ale byli uważani za specjalistów, którym można było powierzyć na przykład zadanie nauczania mnie matematyki. Wywiązywali się z tego zadania lepiej lub gorzej, może nawet najlepiej, jak potrafili. Mieli prawo do własnej oceny sytuacji i do popełniania błędów, a ich postępowanie nie było regulowane drobiazgowymi przepisami. □

ANTONI KOŚCIELSKI

pracownik Instytutu Informatyki
Uniwersytetu Wrocławskiego

