

O równi pochyłej i niektórych problemach z nią związanych

■ BARTOSZ LALEK, HIERONIM LALEK

Rozważania zawarte w tej pracy, zostały zainspirowane artykułem autorów Pusiri Dam-O, Tadeusza Wibiga pt. *Równia pochyła – widok z góry i co do tego ma Higgs w ogóle? Czyli co Ty wiesz o odchylaniu?* zamieszczonym w Fyzyce w szkole nr 5/2010.

Już sam tytuł artykułu jest odbiciem popularnej reklamy „trzy w jednym”. Wyrazimy jednak swoje poglądy dotyczące tylko problemów wokół równi, bo pozostałe treści artykułu są autonomiczne i wątpliwe powiązane, aczkolwiek interesujące i intrygujące. Celem przedstawienia wypowiedzi Autorów w sposób absolutnie wierny, będziemy się posługiwać się wielokrotnie cytami fragmentów artykułu.

A, to fragment pierwszy: *„Fizyka równi pochyłej jest w świadomości społecznej przykładem nikomu niepotrzebnej wiedzy. Jedyнным uzasadnieniem, iż znajduje się ciągle w podręcznikach szkolnych, jest to, by nauczyciel miał coś czym mógłby torturować biedne i niewinne dzieci. Oczywiście jest to nieprawda, co zostanie pokazane”*.

Dziwi nas brak zaufania do inwencji nauczycieli i wiara w ich skłonności sadystyczne. Przecież nauczyciel i uczeń w toku umiejętnie prowadzonej otwartej dyskusji uświadomią sobie, że zjazdy narciarskie, wyścigi kolarskie, piesze wędrówki, jazda: samochodem, na deskorolkach, to fakty związane z przemieszczaniem się po równiach pochyłych o zmiennym kącie nachylenia i zmieniającym się współczynniku tarcia i temat staje się atrakcyjny.

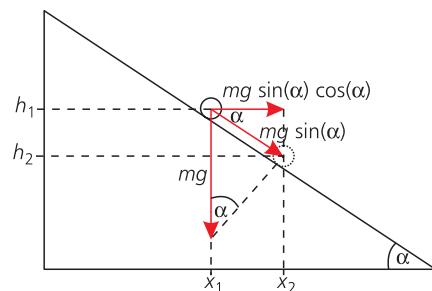
Autorzy piszą też: *„Od czasu Galileusza najlepszym przyrządem do badań grawitacji jest równia pochyła”*.

Uważamy, że jest to pogląd zbyt odosobniony by należało go propagować. Faktycznie

Galileusz posługiwał się równiami o różnych kątach nachylenia, ale głównie do badania ruchu ciał i jako pierwszy podał poprawne wzory opisujące ruch jednostajnie zmienny prostoliniowy. Tymczasem klasyczna teoria grawitacji swój obecny kształt zawdzięcza przede wszystkim Newtonowi, który korzystał z dokonań Kopernika, Galileusza, Keplera, Hoocke’a i wielu astronomów, dostarczycieli obszernych informacji pochodzących z obserwacji ruchu ciał na sferze niebieskiej. Testami doświadczalnymi tej teorii były, między innymi, odkrycia nowych planet i przewidywania ich położenia, loty załogowych i bezzałogowych pojazdów kosmicznych, pływy morskie, opisy ruchu komet, itd.

Jednym słowem największym obszarem testu teorii grawitacji jest sfera niebieska z ogromem zjawisk dostępnych naszym obserwacjom.

Przejdźmy zatem do równi. „działanie równi” Autorzy objaśniają takim rysunkiem:



Rys. 1. Szczegóły sił działających na ciało znajdujące się na równi pochyłej

Rysunek uzupełnia tekst *„Siła grawitacji mg działa na ciało razem z siłą reakcji podłoża, która jest prostopadła do równi i równa co do wartości prostopadłej do równi siły grawitacji. Wszystkie te prostopadłe do rów-*



Podwyższanie energii potencjalnej, by zjechać, fot. Waldemar Czado

ni siły równoważą się (na tym polegała genialna idea Galileusza rozcieńczania grawitacji przy użyciu równi), a poza tym ze względu na prostopadłość i tak nie mają wpływu na ruch ciała wzdłuż równi. Z tych powodów nie narysowano ich na rys. 1.”

Nie bardzo rozumiemy na czym polega „rozcieńczanie grawitacji”, ale domyśliamy się, że chodzi o eliminację sił zewnętrznych działających na ciało równoważących się wzajemnie, prostopadłych do równi. Jednak musimy nieć na uwadze, że siła reakcji równi jest siłą zewnętrzną działającą na ciało, która zsumowana z siłą grawitacji daje siłę wypadkową odpowiedzialną za ruch bez tarcia, która – jak się składa – jest równoległa do równi. Popularnie w praktyce szkolnej nazywamy ją siłą ściąającą lub zsuwającą. Wspominamy o tym, bo w dalszej części rozważań, Autorzy chcąc wyjaśnić źródło pojawiającego się paradoksu, przypominają Czytelnikowi o istnieniu tej siły prostopadłej do powierzchni równi i roli jaką spełnia.

Jesteśmy także wprowadzeni w problem, którego rozwiązanie proponowane jest na gruncie dwóch teorii dających różne wyniki, a rezultaty odpowiednio zaprojektowanego doświadczenia rozstrzygają, która teoria jest prawdziwa. **Problem polega na ocenie sytuacji przez obserwatora patrzącego z góry, a ściślej jaką siłę zmierzy obserwator kierunku poziomego działającą na ciało zsuwające się z równi?**



Test rozpraszania śniegu na równiach, fot. Waldemar Czado

By nie wypaczyć idei Autorów przedstawimy obszernie fragmenty tekstu ukazujący istotę problemu: „Ciekawe zaczyna się jednak, gdy spojrzymy na wszystko z góry. W naszym eksperymencie rozproszeniowym będziemy obserwować odchylenie ciał toczących się po stole, gdy na ich drodze pojawiają się przeszkody-wzniesienia, pagórki, więc jakby równie. Ważna będzie jedynie zatem współrzędna pozioma x i to, jak ona się zmienia (oczywiście to samo dotyczy y). Nie interesuje nas za to h .”

Nie wiemy z czego wynika brak zainteresowania h , która pełni na rysunku i w rozważaniach rolę zmiennej przy równoczesnym zainteresowaniu zmienną y , a obie te zmienne można utożsamić co jest kwestią wyboru układu współrzędnych i oznaczenia osi. Wydaje nam się, że ten fragment tekstu zawiera wewnętrzną sprzeczność. Posługiwanie się sprzecznościami i niedopowiedzeniami jest dość ulubioną przez Autorów cechą prowadzenia narracji, co można dostrzec uważnie studiując cały artykuł.

Czytamy dalej: „Przyspieszenie a jest mierzone wzdłuż równi. Jego składowa widzianna, gdy patrzymy z góry, składowa pozioma- a_x na rys. 1 to:

$$a_x = g \sin(\alpha) \cos(\alpha)$$

i to wszystko co jest nam potrzebne do obliczenia poziomej siły, pod wpływem której zmienia się wartość współrzędnej x ”.

Powyższe rozważania stanowią według Autorów Teorię I, z której wynika wartość poziomej siły działającej na ciało na równi pochyłej:

$$F_I = mg \sin(\alpha) \cos(\alpha).$$

Kontynuując studiowanie artykułu przyjrzyjmy się jak powstaje Teoria II. Czytamy: „Czy mamy jakąś inną teorię równi pochyłej? Oczywiście nie, ale może nie tak do końca. Popatrzmy na rys. 1 z punktu widzenia zasady zachowania energii. Jeżeli ciało znajdujące się początkowo na wysokości h_1 zsunie się tak aby znaleźć się na wysokości h_2 , jego energia potencjalna

$$-\Delta E = -mg(h_2 - h_1) = -mg$$

a jest dodatnie, gdy energia maleje.

Gdybyśmy chcieli przesunąć ciało o ten sam odcinek drogi robiąc to na tyle powoli i ostrożnie, aby nie nadać mu znaczącej energii kinetycznej, musielibyśmy przyłożyć do niego jakąś siłę, która równoważyła by siłę grawitacji ciągnącą ciało w dół. Siłę tę moglibyśmy przykładać różnie, także poziomo i, ponieważ ciało w sumie się przesuwa, siła ta wykonała by pracę. Jej ilość można policzyć (przyjmijmy, że udało by się nam działać ze stałą siłą):

$$W = F_{\text{ext}}(x_2 - x_1) = F_{\text{ext}} \cdot$$

I jest dokładnie tyle, ile wynosi strata energii potencjalnej ($W = -\Delta E$), bo nic innego z energią ciała się nie stało. Ponieważ ruch był jednostajny, to zgodnie z pierwszą zasadą dynamiki Newtona, ta pozioma siła zewnętrzna musi równoważyć poziomą siłę działającą na ciało na równi:

$$\begin{aligned} F_{II} &= -\frac{mg\Delta h}{\Delta x} - mgtg(\alpha) = \frac{mg \sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \\ &= \frac{mg \sin(\alpha) \cos(\alpha)}{\cos(\alpha) \cos(\alpha)} = \frac{mg \sin(\alpha) \cos(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}. \end{aligned}$$

Tak naprawdę jest to nic innego jak bardzo ogólna formuła $F_s = -dE/dx$ dostępna jednak jedynie tym, którzy wiedzą co oznacza symbol po prawej stronie znaku „=” czyli potrafia różniczkować. Ktoś, kto nie potra-

fi, musi zadowolić się całym rozumowaniem przedstawionym powyżej.

Wynik jest inny niż uzyskany wcześniej, który określiliśmy jako Teoria I, nazwijmy go więc Teoria II.

Obie teorie przewidują, jaka jest wartość siły działającej poziomo na ciała umieszczone na równi. Przewidywania te różnią się w oczywisty sposób, a zatem tylko jedno z nich (najwyżej) może być prawdziwe.”

Rozumowanie i stanowisko Autorów prowadzi do wniosku, że w ramach mechaniki klasycznej można stworzyć dwie teorie (a może i więcej) opisujące stan ciała i jego ewolucję, które dają różne wyniki w opisie zachowania się ciał dla tych samych warunków początkowych i niezmiennym stanie oddziaływań z innymi ciałami. Odwołanie się do doświadczenia rozstrzyga, która teoria jest prawdziwa.

Przedstawimy najpierw kilka uwag ogólnych wynikających z własności teorii typowych dla mechaniki klasycznej.

Sugerowane przez Autorów podejście stoi w jaskrawej sprzeczności z deterministycznym ukształtowaniem mechaniki klasycznej. Mechanika klasyczna stworzona przez Newtona, Lagrange’a, Hamiltona i wielu innych, sformułowana jest praktycznie równoważnymi sobie równaniami.

Wybór, które z nich wykorzystamy zależy od parametrów stanu początkowego ciała, jakości informacji jakie chcemy uzyskać, no i operatywności naszej wiedzy.

Uważamy, że Autorzy rozważają nie jeden lecz dwa różne problemy:

- Problem nr 1 to zsuwanie się ciała po równi pochyłej z A do B pod wpływem wypadkowej sił: grawitacji i reakcji równi ruchem jednostajnie przyspieszonym.
- Problem nr 2 to przemieszczanie ciała po równi ruchem jednostajnym.

Ich pytanie zasadnicze to: jak przedstawia się siła działająca na ciało w obu przypadkach, którą widzi obserwator kierunku poziomego?

Oczywiście, że otrzymamy dwa różne rozwiązania. Cóż to by była za sensacja,

gdyby dwa różne stany oddziaływań ciała z „otoczeniem” dawały w obszarze mechaniki klasycznej, takie same wyniki opisu ewolucji czasowej jego stanu.

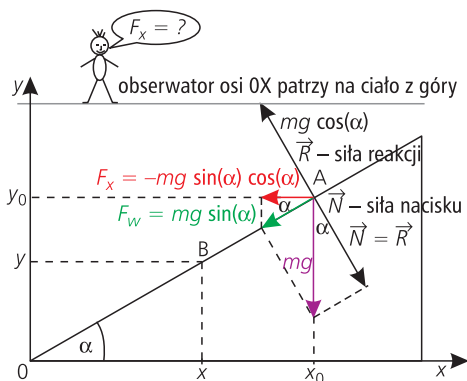
Ale, co ma w takim razie testować subtelnie zaprojektowany eksperyment rozproszeniowy? Może wyniki eksperymentu dotyczą problemu nr 2, ale nie są testem tego co Autorzy mają na uwadze, mianowicie rozstrzygnięciem poprawności jednej z dwóch prezentowanych konkurencyjnych Teorii, bo w przedstawionym materiale taki problem jest fikcyjny.

Można też wykazać, że dwa różne podejścia do jednego jasno sprecyzowanego problemu dają takie same wyniki.

Niech to będzie problem nr 1. Posłużymy się rysunkiem, na którym przedstawiona jest sytuacja w dobranym odpowiednio układzie współrzędnych. Przyjmujemy za zerowy poziom energii potencjalnej poziom zawierający oś OX .

Stan energii potencjalnej ciała w przyjętym układzie odniesienia określa równanie: $E = mgy$. Położenie początkowe ciała – zakładamy, że jest to stan spoczynku – znajduje się w punkcie $A(x_0, y_0)$, a każde następne w dowolnym punkcie $B(x, y)$. Ciało zsuwa się bez tarcia pod wpływem siły wypadkowej dwóch sił zewnętrznych: siły grawitacji i siły reakcji równi o wartości $F_w = mgsin\alpha$.

Wartość tej siły widziana przez obserwatora osi OX to jej rzut na kierunek poziomy: $F_x = -mgsin\alpha\cos\alpha$.



Rys. 2.

Obliczmy również wartość tej siły stosując zasadę zachowania energii. Ubytek energii potencjalnej jest równy energii kinetycznej, która dzięki temu powstaje

$$E_k = mv^2.$$

Wartość prędkości na dowolnym poziomie y obliczamy z zasady zachowania energii:

$$v = \sqrt{2(y_0 - y)g}.$$

Obserwator osi OX mierzy jej wartość:

$$v_x = \sqrt{2(y_0 - y)g} \cos\alpha,$$

zatem energia kinetyczna ciała mierzona przez tego obserwatora wyrazi się wzorem:

$$E_{kx} = mv_x^2 = m2g(y_0 - y)\cos^2\alpha.$$

Po uproszczeniach i uwzględnieniu, że $y = \tan(\alpha)x$ otrzymamy:

$$E_{kx} = mgy_{\downarrow 0} - \tan(\alpha)x\cos^2\alpha.$$

Wiedząc, że

$$F_x = -\frac{dE_{px}}{dx} = \frac{dE_{kx}}{dx} = -mg \sin\alpha \cos\alpha.$$

Tak więc otrzymane rezultaty obliczeń dwoma sposobami są identyczne.

Gdyby było inaczej należałoby wnikliwie przeanalizować rozumowanie i wyeliminować fragmenty błędnego rozumowania i obliczenia z tym związane.

Problem nr 2 można rozstrzygnąć bardzo prosto. Jeżeli ciało zsuwa się z równi ruchem jednostajnym przostoliniowym to obserwator każdego kierunku (w tym kierunku osi OX), mierzy siłę wypadkową równą 0 i to jest jedyna sensowna odpowiedź.

Poszukajmy więc innego problemu. Tę siłę wypadkową można przedstawić na nieskończenie wiele sposobów, ale wyróżnijmy na kierunku poziomym zerową siłę wypadkową jako sumę dwóch sił równoważących się, z których jedna ma wartość $-F_x$.

Biorąc pod uwagę tylko tę siłę obliczamy wartość pracy wykonanej przez nią na przesunięciu $\Delta x = x - x_0 < 0$. Wprowadźmy oznaczenie $\Delta y = y - y_0 < 0$.

Określamy teraz jakie warunki muszą być spełnione by ubytek energii potencjalnej $\Delta E = mg\Delta y$ mógłby być spowodowany działaniem tej siły dokonującej przemieszczenia Δx ?

$$W = -F_x = mg\Delta y$$

wiedząc, że $\Delta y/\Delta x = \tan\alpha$ otrzymamy:

$$F_x = -mg\tan\alpha.$$

Zatem jedna z dwóch sił równoważących się widziana przez obserwatora osi OX , której praca na przesunięciu Δx równa jest ubytkowi energii potencjalnej wynikającej ze zmiany położenia ciała ma wartość:

$$F_x = -mg\tan\alpha.$$

Znak „-” wyróżnia tę siłę z dwóch równoważących się, która ma zwrot przeciwny do zwrotu osi OX .

Równie identycznie przedstawi się ta siła gdy zastosujemy równanie:

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{dE_p}{dx} = -\frac{d}{dx}mgy = -\frac{d}{dx}mg\tan(\alpha)x = \\ &= -mg\tan(\alpha)x. \end{aligned}$$

Znowu stosując dwie metody rozwiązania problemu otrzymaliśmy zgodne wyniki. Powróćmy jednak do realiów sytuacji bo z nich wynikają ciekawe wnioski.

Jeżeli ciało w warunkach naturalnych zsuwa się z równi ruchem jednostajnym prostoliniowym bez tarcia, to siła wypadkowa musi być zrównoważona siłą przyłożoną w tym samym punkcie o takiej samej wartości i przeciwnym znaku, której rzut na kierunek OX ma wartość: $mg\sin(\alpha)\cos(\alpha)$.

Zatem siła F_x spełnia równanie

$$mg\sin(\alpha)\cos(\alpha) = mg\tan(\alpha)x,$$

którego wartość dla $\alpha = 0$ wynosi 1, zatem i siła $F_x = 0$.

**Nie ma więc zatem takiej siły przesu-
wającej ciało wzdłuż kierunku OX , która
zmieniałaby jego energię potencjalną.**

Do takiego wniosku można szybko dojść rozumując następująco: energia potencjalna ciała w naszym przypadku zależy tylko od zmiennej y :



Równia pochyła z o-kładem, fot. Waldemar Czado

$$E_p = mgy,$$

jej niezależność od zmiennej x reprezentuje równanie, z którego wynika ostatni wniosek:

$$\frac{\partial E_p}{\partial x} = 0 \Rightarrow F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} = 0.$$

Nam pozostaje już tylko podziękować Autorom za inspirację i spróbować zrozumieć dalsze ciekawe idee zawarte w artykule. Dziękujemy serdecznie naszemu Koleździe Waldkowi Czado z Rymanowa Zdroju, który jest, między innymi, nauczycielem fizyki i artystą fotografikiem, a jego zdjęcia ukazujące piękno: gór, harmonii i żywiołów przyrody, są ozdobą niejednej galerii i „wejść internetowych”. Zdjęcia tych „naturalnych równi” i ludzi odgrywających rolę ciał są jego dziełem. Ich wymowa zobowiązuje by za pomocą równi nie „torturować biednych i niewinnych dzieci”, a raczej rozbudzać w nich umiłowanie fizyki.

LITERATURA

- [1] Pusiri Dam-O, T. Wibig, *Równia pochyła – widok z góry i co do tego ma Higgs w ogóle? Czyli: co Ty wiesz o odchyłaniu?* „Fizyka w Szkole” nr 5/2010.
- [2] L. Lederman, D. Teresi, *Boska cząstka*, Prószyński i S-ka, Warszawa.

BARTOSZ LALEK

ZSKU Krosno

HIERONIM LALEK

Rymanów