

Maturalne *skojarzenia*

■ TOMASZ MASŁOWSKI

Obowiązkowa matura z matematyki dodaje każdemu z nas pracy, większa jest też odpowiedzialność za wyniki naszych uczniów, ale fakt, że to właśnie my uczymy matematyki i logicznego myślenia, dostarcza nam nieustającej radości.

W maju i czerwcu w oczekiwaniu na wyniki egzaminu dyskutujemy, jaka była ta matura 2011. Zadajemy sobie pytania:

- Czy tegoroczna matura była trudniejsza od matury ubiegłorocznej?
- Jakie były różnice między majową maturą a maturą próbną?
- Jaki procent uczniów obleje podstawę?
- Jaka będzie matura obowiązkowa z matematyki za rok?

Na większość pytań nie otrzymamy jednoznacznych odpowiedzi i kolejny rok szkolny zaczniemy od mozolnej pracy nad swoim warsztatem „maturalnym” i nad kolejnym rocznikiem maturzystów, dla których często matematyka nie jest ukończonym przedmiotem.

Warto poświęcić trochę czasu na analizę zadań otwartych i spróbować je rozwiązać nieco inaczej niż zwykle. Im skojarzenie bardziej odbiega od standardu, tym ciekawiej i bardziej intrygująco. Mechanizm podstawy programowej i egzaminów zewnętrznych ogranicza nasze

możliwości, ale warto poświęcić trochę czasu, by pokazać uczniom to, że matematyka jest królową nauk.

Zadanie nr 24 polegało m.in. na rozwiązaniu równania $3x^2 - 10x + 3 = 0$. Polska „Szkoła Matematyczna” żyje w świecie „delty”, ewentualnie sięgając do postaci kanonicznej funkcji kwadratowej, zatem nasi uczniowie nie mają ochoty wychodzić poza schemat i postępować na przykład tak:

$$3x^2 - (9 + 1)x + 3 = 0,$$

$$3x^2 - 9x - x + 3 = 0,$$

$$3x(x - 3) - (x - 3) = 0,$$

$$(3x - 1)(x - 3) = 0.$$

Można w tym miejscu poczynić różne ciekawe obserwacje. Pierwiastkami równania

$$Ax^2 - (A^2 + 1)x + A = 0$$

są liczby $x = \frac{1}{A}$, $x = A$. Podobnie, pierwiastkami równania

$$Ax^2 - (A + B)x + B = 0$$

są liczby $x = \frac{B}{A}$, $x = 1$, gdyż

$$\begin{aligned} Ax^2 - Ax - Bx + B &= \\ = Ax(x - 1) - B(x - 1) &= \\ = (Ax - B)(x - 1). \end{aligned}$$

Zatem pierwiastkami równania

$$\sqrt{2}x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0$$



są liczby $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$, $x = 1$, a pierwiastkami równania $2011x^2 - 2013x + 2 = 0$ są liczby $x = \frac{2}{2011}$, $x = 1$. Analogicznie, pierwiastkami równania

$$Ax^2 - (AB+1)x + B = 0$$

są liczby $x = \frac{1}{A}$, $x = B$, gdyż

$$\begin{aligned} Ax^2 - ABx - x + B &= \\ &= Ax(x-B) - (x-B) = \\ &= (Ax-1)(x-B). \end{aligned}$$

Zadanie nr 25 polegało na uzasadnieniu, że $a^4 + b^4 = 31$, jeśli $a + b = 1$ oraz $a^2 + b^2 = 7$. Oczywiście próby obliczenia wartości wyrażenia $a^4 + b^4$ poprzez wyznaczenie $a = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$ oraz $b = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$ w większości przypadków musiały skończyć się tragicznie. Na to zadanie w arkuszu było tak mało miejsca, że mogło istnieć tylko jedno słuszne rozwiązanie:

„Z równości $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ można wyznaczyć $ab = -3$, a następnie obliczyć

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 &= (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 = \\ &= 7^2 - 2 \cdot (-3)^2 = 49 - 18 = 31. \end{aligned}$$

Analizując, jak nietypowo można rozwiązać ten problem, postanowiłem kolejno dla podanych wartości a i b obliczać sumy n -tych potęg $x_n = a^n + b^n$. Można zauważyć następujące równości:

$$\begin{aligned} x_3 &= a^3 + b^3 = \\ &= (a+b)(a^2 + b^2) - ab(a+b) = \\ &= 1 \cdot 7 - (-3) \cdot 1 = 10, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_4 &= a^4 + b^4 = \\ &= (a+b)(a^3 + b^3) - ab(a^2 + b^2) = \\ &= 1 \cdot 10 - (-3) \cdot 7 = 31, \end{aligned}$$

podobnie:

$$\begin{aligned} x_5 &= a^5 + b^5 = \\ &= (a+b)(a^4 + b^4) - ab(a^3 + b^3) = \\ &= 1 \cdot 31 - (-3) \cdot 10 = 61 \end{aligned}$$

i ogólnie:

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= a^{n+2} + b^{n+2} = \\ &= (a+b)(a^{n+1} + b^{n+1}) - ab(a^n + b^n) = \\ &= 1 \cdot x_{n+1} - (-3) \cdot x_n, \end{aligned}$$

gdzie $n \geq 1$. Otrzymujemy stąd ciąg rekurencyjny określony warunkami

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 7 \\ x_{n+2} = x_{n+1} + 3x_n \end{cases}$$

który pozwala szybko obliczać kolejne wartości $a^n + b^n$ oraz sformułować ciekawe zadanie:

„Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ liczba

$$\left(\frac{1 - \sqrt{13}}{2} \right)^n + \left(\frac{1 + \sqrt{13}}{2} \right)^n$$

jest naturalna oraz przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1”.

W **zadaniu nr 26** poproszono m.in. o podanie przedziału maksymalnej długości, w którym funkcja jest malejąca, zamiast – jak zwykle – o podanie maksymalnego (największego) przedziału. Takie sformułowanie dopuszcza podanie zarówno przedziału domkniętego, jak i przedziału otwartego (są one tej samej długości!), ale czyż wtedy uczeń w odpowiedzi nie powinien podać wszystkich czterech przedziałów wraz z przedziałami domknięto-otwartymi – zgodnie z zasadą, że zawsze należy podawać wszystkie rozwiązania problemu?



W **zadaniu nr 27** wiedząc, że liczby $x, y, 19$ tworzą ciąg arytmetyczny oraz $x + y = 8$ należało wyznaczyć liczby x i y . Tym razem zaproponuję krótkie stwierdzenie: „Suma trzech liczb $x, y, 19$ wynosi 27, gdyż 8 dodać 19 równa się 27. Zatem liczba y , jako średnia arytmetyczna trzech liczb, musi być równa 9, stąd x jest równe -1 ”. Czy wszystko musi być zapisywane tylko symbolami matematycznym?

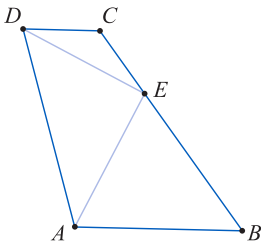
W **zadaniu nr 28** należało obliczyć wartość wyrażenia $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$ wiedząc, że $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 2$. Wydaje się, że istnieje jedyne rozwiązanie, polegające na uproszczeniu wyrażenia przy wykorzystaniu m.in. „jedynki trygonometrycznej”. Można jednak inaczej: zauważmy, że $\alpha = 45^\circ$, bo $1 + 1 = 2$ oraz to, że jest to jedyna możliwość, bo równanie $t + \frac{1}{t} = 2$ spełnia tylko $t = 1$. Stąd

$$\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}.$$

Kilka zadań zamkniętych jak i **zadanie nr 29** nie miało w pełni jasnych sformułowań:

„Zadanie 29. Dany jest czworokąt $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$. Na boku BC wybrano taki punkt E , że $|EC| = |CD|$ i $|EB| = |BA|$. Wykaż, że kąt AED jest prosty.”

Jeśli uczeń wykonał prawidłowy rysunek (rys. 1),



Rys. 1

to nie miał już większych problemów z rozwiązaniem zadania.

Natomiast jeśli pierwsze zdanie „Dany jest czworokąt...” potraktował jako jedyny element założenia określający kształt trapezu i narysował trapez, w którym suma długości podstaw nie była równa długości stosownego ramienia, nie miał już szans na udowodnienie, że kąt AED jest prosty, gdyż punkt E po prostu nie istniał.

Zadanie nr 30 dotyczyło wyznaczenia prawdopodobieństwa tego, że przy losowaniu kolejno dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem ze zbioru $Z = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ uzyskamy liczby, których suma jest liczbą podzielną przez 3.

Jako nietypowe rozwiązanie zamiast „inteligentnego drzewa” proponuję „inteligentną tabelkę”:

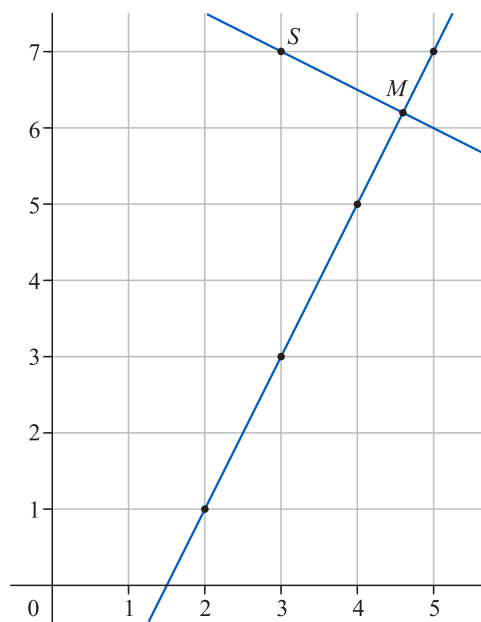
	I los.	A_0	A_1	A_2
II los.		$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$
A_0	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{49}$	$\frac{6}{49}$	$\frac{4}{49}$
A_1	$\frac{3}{7}$	$\frac{6}{49}$	$\frac{9}{49}$	$\frac{6}{49}$
A_2	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{49}$	$\frac{6}{49}$	$\frac{4}{49}$

gdzie do zbioru A_i należą te liczby, które przy dzieleniu przez 3 dają resztę i : $A_0 = \{3, 6\}$, $A_1 = \{1, 4, 7\}$, $A_2 = \{2, 5\}$. Szukane prawdopodobieństwo jest równe sumie: $\frac{4}{49} + \frac{6}{49} + \frac{6}{49} = \frac{16}{49}$. Metoda inteligentnej tabelki, jak i metoda drzewa stochastycznego, gdzie zaznaczone są prawdopodobieństwa (a nie liczby obiektów) bazuje na zasadzie mnożenia i dodawania prawdopodobieństw, która wynika ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite,

którego nie ma w obowiązującej podstawie programowej nawet na poziomie rozszerzonym. No ale cóż, siła przyzwyczajenia nauczycieli matematyki, jak i CKE jest silniejsza nawet od podstawy programowej.

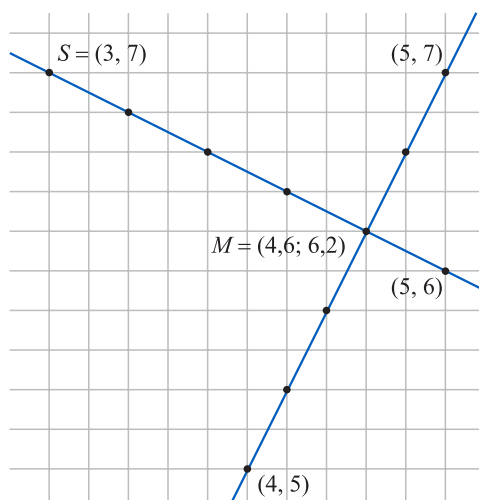
Zadanie nr 31, w którym należało wyznaczyć punkt styczności okręgu o środku $S = (3, 7)$ z prostą o równaniu $y = 2x - 3$ skojarzyło mi się z artykułem W. Guzickiego „O rozwiązywaniu zadań metodą odgadywania – pomocne kratki” z „Matematyki” nr 2/2011.

Spróbowałem zastosować jego metodę, wykonując dokładny rysunek (rys. 2).



Rys. 2

Już myślałem, że poniosłem klęskę w odczytywaniu współrzędnych punktu M , ale do głowy mi przyszedł pomysł powiększenia rysunku, który roboczo nazwałem metodą „na lupkę” (rys. 3).



Rys. 3

Odczytanie współrzędnych punktu M nie sprawia już problemu, natomiast problemem jest to, co z metodą „na lupkę” zrobiłby egzaminator.

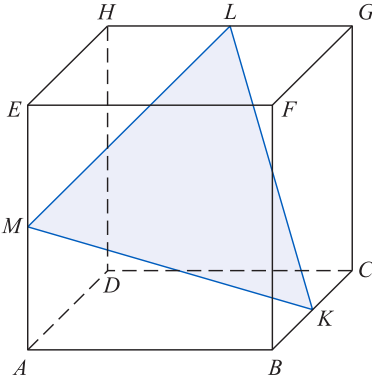
Zadanie nr 32 o piechurze, który mógłby dystans 112 km przebyć w czasie o trzy dni dłuższym, gdyby szedł o 12 km dziennie mniej, nawiązuje do innego artykułu W. Guzickiego „O rozwiązywaniu zadań metodą odgadywania”, „Matematyka” nr 11/2010. Mimo, iż liczba dni musi być liczbą naturalną, nie można uzyskać maksymalnej liczby punktów za to zadanie, analizując jedynie tabelę,

Liczba dni	Liczba km/dni
1	112
2	56
4	28
7	16
8	14
14	8
16	7
28	4
56	2
112	1

gdyż liczba kilometrów, które przechodzi dziennie turysta nie musi być liczbą natu-

ralną, a zatem liczba dni nie musi być dzielnikiem liczby 112.

Dawno, dawno temu w Polsce były prawdziwe klasy matematyczno-fizyczne, w których uczniowie uczyli się elementów analitycznej geometrii przestrzennej i **zadanie nr 33** o polu trójkąta w jednostkowym sześcianie (rys. 4)



Rys. 4

mogliby rozwiązać z wykorzystaniem wzoru $P_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a} \times \vec{b}|$, gdzie $\vec{a} \times \vec{b}$ oznacza iloczyn wektorowy wektorów rozpinających trójkąt. Ponieważ

$$\vec{MK} = \left[1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right], \quad \vec{ML} = \left[\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right],$$

więc

$$\begin{aligned} P_{\Delta MKL} &= \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{3}{4} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}. \end{aligned}$$

I na sam koniec pomysł dla Ministerstwa Edukacji Narodowej, dotyczący wprowadzania nowoczesnych technologii w nauczaniu, także matematyki.

Zamiast zakupu za setki milionów złotych laptopów dla uczniów szkół podstawowych, wystarczy zmienić przepisy w rozporządzeniu o ocenianiu i egzaminach, zezwalając na korzystanie z komputerów podczas wszystkich prac klasowych, jak i egzaminów zewnętrznych. Wtedy na pewno większość uczniów przyniesie na lekcje laptop, a jedynym problemem stanie się to, jak zabezpieczyć się przez ściąganiem z Facebooka które, według informacji z Gazety Wyborczej, miało miejsce w tym roku podczas egzaminu maturalnego z matematyki. \square

TOMASZ MASŁOWSKI

nauczyciel matematyki X Liceum Ogólnokształcące w Toruniu

Oto jak jeden z maturzystów rozwiązywał zadanie 32:

Turysta przeszedł pierwszego dnia a_1 , drugiego a_2 kilometrów itd., przy czym $a_1 = a_2 = \dots = a_n$. Jest to ciąg arytmetyczny o różnicy $r = 0$. Suma kilometrów, które przeszedł, wynosi 112, czyli $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{a_1 + a_1}{2} \cdot n = 112$, gdzie n jest liczbą dni podróży. Stąd $a_1 \cdot n = 112$. Gdyby przechodził każdego dnia o 12 km mniej, czyli $a_1 - 12$ km, podróż trwałaby o 3 dni dłużej, czyli $n + 3$ dni, a więc $S_{n+3} = \frac{a_1 - 12 + a_n - 12}{2} (n + 3) = 112$. Mamy stąd $(a_1 - 12)(n + 3) = 112$.

Następnie uczeń poprawnie rozwiązał układ równań.

A wydawałoby się, że już nic nas nie zadziwi...

nadesłała **Zofia Leszczyńska**